Wiederholung: Aussage <u>Zentraler Grenzwertsatz</u>:

Seien X_i, $i = 1, 2, \dots, n$ gleichverteilte Zufallsvar.

mit: $E(X_i) = \mu$; $V(X_i) = \sigma^2$

Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow E(S_n) = n\mu$, $V(S_n) = n\sigma^2$

I.e. $\mu(S_n) = n\mu$, $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\,\sigma$

und: $$S_n^* = \frac{S_n - \mu(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

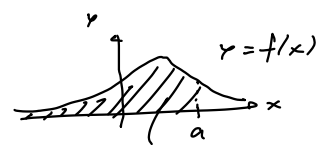
ist approx. <u>Standardnormalverteilt</u>

I.e. $$P(a \le S_n^* \le b) \xrightarrow{n \to \infty} \Phi(b) - \Phi(a)$$

Kum.-Vert.-Fkt. von Standardnormalvert.

"<u>Beweis</u>:"

Hilfs-Resultat: Sei <u>$f(x)$ Dichte von X</u>



$P(X \le a)$

$$\longrightarrow P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

$$\longrightarrow P\left(\boxed{\frac{X}{C}} \le a\right) = P(X \le aC) \qquad (C > 0)$$

$$= \int_{-\infty}^{aC} f(x)\,dx$$

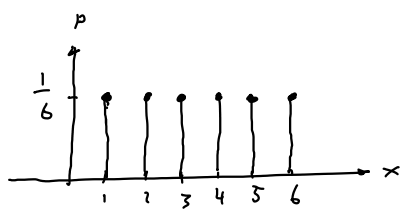
$$\underset{t = \frac{x}{C}}{=} \int_{-\infty}^{a} f(tC)\,C\,dt = \boxed{C} \int_{-\infty}^{a} \boxed{f(tC)}\,dt$$

$\longrightarrow$ <u>Die Zufallsvar. $\frac{X}{C}$ besitzt Dichte $C f(Cx)$.</u>

<u>Beobachtung im diskreten Fall</u>:

Wurf mit Würfel, X = Augenzahl.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



$P(X = x) = p_i = \frac{1}{6}$

2. Würfel, Y = Augenzahl.

$P(Y = y_i) = p_i = \frac{1}{6}$

Zählen Augenzahlen zusammen: $X + Y$ = Summe Augenzahlen

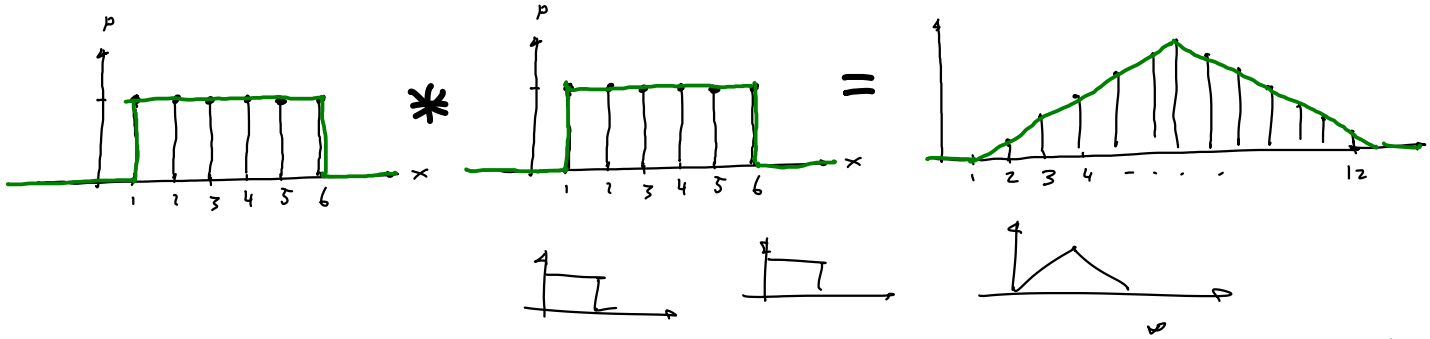
Bsp.: $P(X+Y=5) = P(X=1, Y=4) + P(X=2, Y=3) + P(X=3, Y=2) + P(X=4, Y=1)$

$$= P(X=1)\cdot P(Y=4) + P(X=2)\cdot P(Y=3) + P(X=3)P(Y=2) + P(X=4)P(Y=1)$$

$$= 4\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{36}.$$

kann geschrieben werden als: $P(X+Y=5) = \sum_{i=1}^{4} P(X=i)P(Y=5-i)$

$$= \underline{\sum_{i=1}^{4} P(i)\,P(5-i)}$$ diskrete Faltung!!!



$$(f*g)(x) = \underline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,g(x-x')\,dx'}$$

Es gilt: Sei X Zufallsvar. mit Dichte $f(x)$

— " — Y — " — $f(x)$

$\longrightarrow$ $S = X+Y$ ist Zufallsvar. mit Dichte $f*f$!!!!

Sei nun $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ und sei $f_n(x)$ Dichte von S_n

$$\longrightarrow f_n(x) = (\underbrace{f*f*f*\cdots*f}_{n \text{ Faktoren}})(x)$$

Nehmen an $\mu(X_i) = 0$; $\sigma(X_i) = 1$

$\longrightarrow$ Standardisierte Zufallsvar. ist: $S_n^* = \dfrac{S_n - n\overset{0}{\mu}}{\sqrt{n}\,\underset{1}{\sigma}} = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$

Hilfs-Resultat $\longrightarrow$ Dichte von $S_n^* = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ ist:

$$\underbrace{\sqrt{n}\,(f*f*\cdots*f)(\sqrt{n}\,x)}_{=:\,g_n(x)}$$

<u>Wie berechnen wir $g_n(x)$?</u>

<u>Idee</u>: Fourier: benutzen: Sei $g(t) = f(at) \longrightarrow \hat{g}(s) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$

$$\longrightarrow \hat{g}_n(s) = \widehat{(f*f*\cdots*f)}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \hat{f}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\cdot\hat{f}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\cdots\cdots\hat{f}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\widehat{f*f} = \hat{f}\cdot\hat{f}$$

$$\hat{f}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \underbrace{e^{\boxed{-j2\pi x \frac{s}{\sqrt{n}}}}}_{e^{\square}}\, dx$$

$$e^{\square} = 1 + \square + \frac{\square^2}{2} + \frac{\square^3}{3!} + \frac{\square^4}{4!} + \cdots \quad \text{(Taylorreihe)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(1 - j2\pi x\frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\left(j2\pi x\frac{s}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots\right) dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}_{=1} - j2\pi\frac{s}{\sqrt{n}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x\,dx}_{0} - \frac{2\pi^2 s^2}{n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x^2\,dx}_{1} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{2\pi^2 s^2}{n} + \cdots$$

$$\longrightarrow \quad \hat{g}_n(s) = \left(\hat{f}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \simeq \left(1 - \frac{2\pi^2 s^2}{n}\right)^n$$

Binomialentwicklung

$$\underset{b = -2\pi^2 s^2}{=} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{b}{n}\right)^k \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{=1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{b}{n}\right)^k$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}}_{\frac{n!}{(n-0)!\,0!} = 1} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n}\cdot\frac{b}{n} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)}{2!}}\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \cdots$$

$$= 1 + b + \frac{1}{2!}b^2 \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} + \cdots$$

$$\cong 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \cdots$$

$$= e^b$$

I.e. $$\underline{\hat{g}_n(s)} = \left(\hat{f}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \simeq \left(1 - \frac{2\pi^2 s^2}{n}\right)^n \simeq \underline{e^{-2\pi^2 s^2}}$$

$$\longrightarrow \quad \underline{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \text{ ist approx. Normalverteilt!}} \qquad \square$$

[siehe Osgood]