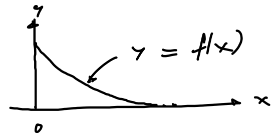
Exponentialverteilung

Zufallsvar. X heisst <u>exponentialverteilt</u> mit Parameter $\lambda > 0$,

falls Dichte gegeben ist durch:
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : x \geq 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$



Kum. Vert.-Fkt.:
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tilde{x})\,d\tilde{x} \overset{x \geq 0}{=} \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda \tilde{x}}\,d\tilde{x}$$
$$= -e^{-\lambda \tilde{x}} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

I.e.
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & : x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt:
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Zentraler Grenzwertsatz

- Illustration mit Matlab.
- <u>Aussage des Satzes</u>: Seien X_i, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvar. mit: $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$

Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\longrightarrow E(S_n) = n\mu$$
$$V(S_n) = n\sigma^2$$

I.e.
$$\boxed{\begin{aligned} \mu(S_n) &= n\mu \\ \sigma(S_n) &= \sqrt{n}\,\sigma \end{aligned}}$$

Erwartungswert der Summe

Standardabw. — " —

Es gilt:
$$\boxed{S_n^* = \frac{S_n - \mu(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \quad \text{ist approx. Standardnormalverteilt!}}$$

I.e.
$$P(a \leq S_n^* \leq b) \xrightarrow{n \to \infty} \Phi(b) - \Phi(a)$$

Φ: Kum. Vert.-Fkt. von Standardnormalverteilung.

Bsp.: Arbeiter fertigt Serie von 50 Teilen.

Zeit pro Bauteil im Durchschnitt: 20 min.

Standardabw.: 4 min.

Man bestimme approx. die Wahrsch. dass er mind. 25 Bauteile in den ersten 450 min. fertigt.

Lösg.: Sei X_i: Zeit für i-tes Bauteil.

$\longrightarrow S = \sum_{i=1}^{25} X_i$: Zeit für die ersten 25 Bauteile

Gesucht ist somit: $P(S \leq 450)$

$$\mu(S) = 25 \cdot \mu(X_i) = 25 \cdot 20 = 500$$

$$\sigma(S) = \sqrt{25}\, \sigma(X_i) = 5 \cdot 4 = 20$$

$$\longrightarrow S^* = \frac{S - \mu(S)}{\sigma(S)} = \frac{S - 500}{20}$$

$$\longrightarrow P(S \leq 450) = P\left(S^* \leq \frac{450 - 500}{20}\right)$$

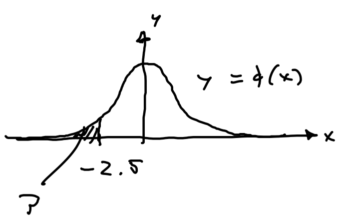
$$= P(S^* \leq -2.5)$$

$$= \Phi(-2.5)$$

$$= 1 - \Phi(2.5)$$

$$= 1 - 0.9938$$

$$= 0.0062 = \underline{0.62\ \%}$$



Aufgabe: Warenlift mit Nutzlast: 10'000 kg

Sollen 200 Zementsäcke transportiert werden.

Man weiss: Gewicht Zementsack folgt Verteilung mit: $\mu = 49.5$ kg (Erw.-Wert)

$\sigma = 5 \cdot \sqrt{2}$ kg (Standardabw.)

Ges.: Wahrsch. dass etwas schief geht.

Lösg.: Sei X_i Gewicht des i-ten Sacks.

Gewicht der 200 Säcke: $S_n = \sum_{i=1}^{200} X_i$

$\longrightarrow \mu(S_n) = n\mu(X_i) = 200 \cdot 49.5 = 9900$

$\sigma(S_n) = \sqrt{n}\, \sigma(X_i) = \sqrt{200}\, 5\sqrt{2} = 100$

$S_n^* = \dfrac{S_n - \mu(S_n)}{\sigma(S_n)} = \dfrac{S_n - 9900}{100}$ ist standardnorm.-vert.

$$\longrightarrow P(S_n \geq 10'000) = P\left(S_n^* \geq \frac{10'000 - 9900}{100}\right) = P(S_n^* \geq 1)$$

$$= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413$$

$$= 0.1587 = \underline{15.87\%}$$