Wiederholung: Wahrsch.-Verteilung:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Def.: **Erwartungswert:** $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Bsp:

X	4
$P(X)$	1

Y	1	5
$P(Y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Z	2	4	6
$P(Z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

W	4	5	6
$P(W)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\longrightarrow E(X) = 4$

$E(Y) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 5 = 4$

$E(Z) = \dots = 4$

$E(W) = \dots = 5$

Wir sehen: $E(X) = E(Y) = E(Z)$

Aber: Abweichungen bei Y viel grösser als bei X!

Mass um diese Abweichungen zu messen ist **Varianz**

= durchschnittliches Abweichungsquadrat zum Mittelwert

$Y: 1, 5, 5, 5$

Y	1	5
$P(Y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$\longrightarrow E(Y) = 4$

$$\underline{Var(Y)} = \frac{1}{4}\left((4-1)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}(4-1)^2 + \frac{3}{4}(4-5)^2 = \underline{3}$$

$(Z: 2, 4, 4, 6)$

Analog:

$\underline{Var(X)} = 1 \cdot (4-4)^2 = \underline{0}$

$\underline{Var(Z)} = \frac{1}{4}(4-2)^2 + \frac{1}{2}(4-4)^2 + \frac{1}{4}(4-6)^2 = \underline{2}$

$\underline{Var(W)} = \dots = \underline{2}$

Def.: Zufallsvar. X mit Werten x_i

$$\boxed{\begin{aligned} V(X) &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 \end{aligned}}$$

heisst **Varianz** von X.

$\boxed{\sigma = \sqrt{V(X)}}$ heisst **Standardabweichung** von X.

Bem.: (i) σ hat die selbe Einheit wie X.

(ii) Es gilt: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Herleitung:

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \sum_i p_i (x_i - E(X))^2 \\
&= \sum_i p_i \left(x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2 \right) \\
&= \sum_i p_i x_i^2 - \sum_i p_i 2 x_i E(X) + \sum_i p_i E(X)^2 \\
&= E(X^2) - 2E(X) \underbrace{\sum_i p_i x_i}_{E(X)} + E(X)^2 \underbrace{\sum_i p_i}_{=1} \\
&= E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\
&= E(X^2) - E(X)^2
\end{aligned}
$$

Bsp.: Würfeln, X = Augenzahl

I.e.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\longrightarrow$ $E(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = \underline{3.5}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$\downarrow$

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$

$\longrightarrow$ $\underline{V(X)} = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \ldots = \underline{\frac{35}{12}}$

$\longrightarrow$ $\underline{\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}}}$

Aufgabe: Zufallsvar. X mit:

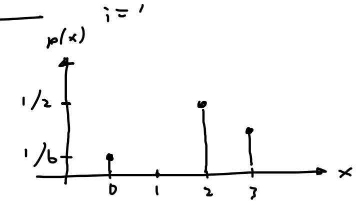
x_i	0	2	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

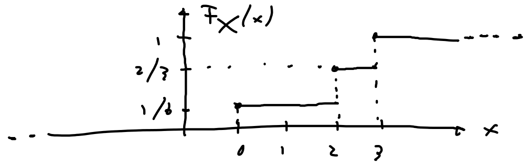
Ges.: (i) $E(X)$
(ii) $V(X)$
(iii) Grafisch: - Wahrsch.-Vert.
- Kum.-Vert.

Lösg.: (i) $\underline{E(X)} = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i = \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 3 = \underline{2}$

(ii) $\underline{V(X)} = \sum_{i=1}^{3} p_i (x_i - E(X))^2 = \frac{1}{6}(0-2)^2 + \frac{1}{2}(2-2)^2 + \frac{1}{3}(3-2)^2 = \frac{4}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \underline{1}$

(iii)





Binomialverteilung: Zufallsexp. mit 2 Ergebnissen:

ω	Erfolg	Misserfolg
x_i	1	0
p_i	p	$q = 1 - p$

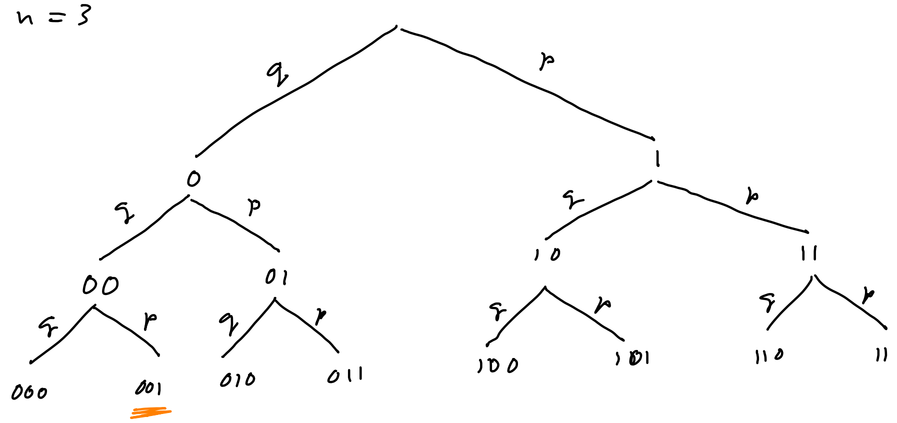
} heisst Bernoulli-Verteilung mit Parameter p.

Betrachten n Wiederholungen dieses Exp.

Sei S = # Erfolge bei n Wiederholungen

S heisst Binomialvar.

Bsp.: $n = 3$



$$P(S=0) = P(\{000\}) = \boxed{1}\cdot q^3$$

$$P(S=1) = P(\{001\}) + P(\{010\}) + P(\{100\})$$

$$= q^2 p + qpq + pq^2 = \boxed{3}\, p q^2$$

$$P(S=2) = \ldots = \boxed{3}\, p^2 q$$

$$P(S=3) = \boxed{1}\cdot p^3$$

Allgemein: n Wiederholungen: $P(S=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

I.e.: $\boxed{P(S=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$ Binomial-Verteilung (mit Parameter n, p)

Bsp.: Münze 5mal werfen.

X = # Kopf $\longrightarrow$ X binom. verteilt mit: $n = 5$; $p = \frac{1}{2}$

$$\longrightarrow P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} = 0.3125$$

Falls Münze manipuliert: $P(\{\text{Kopf}\}) = \frac{2}{3}$

$$\longrightarrow P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0.33$$

$$\left[\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right]$$

Aufgabe: Schraubenproduktion, jede Schraube mit Wahrsch. von $p = \frac{1}{100}$ Ausschuss.
Schrauben in 10er-Pack verkauft.
Pack Schrauben wird zurückgenommen, falls mehr als eine Schraube im Pack Ausschuss ist.
Ges: Anteil an Packungen, die zurückgenommen werden.

Lösg.: X = # Schrauben die Ausschuss sind, in einem Pack

$\rightarrow$ X bin.-verteilt mit $n = 10$; $p = \frac{1}{100}$

$\rightarrow$ Wahrsch. dass Pack zurückgeht

$$= P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$
$$= 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{100}\right)^0\left(\frac{99}{100}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{1}{100}\right)^1\left(\frac{99}{100}\right)^9$$
$$= 0.00427$$

$\rightarrow$ 0.43 % der Packungen gehen zurück.