Diskrete Zufallsvar.

Idee: Zuordnung einer Zahl zu einem Ergebnis
(↳ quantitative Methode)

Bsp: Münze 3mal werfen, Gewinn = # Köpfe

Ergebnis	KKK	KKZ	KZK	ZKK	KZZ	ZKZ	ZZK	ZZZ
Gewinn	3	2	2	2	1	1	1	0

Bsp.: Würfeln,

$$\text{Gewinn} = \begin{cases} 2 \cdot \text{Augenzahl} : & \text{Augenzahl gerade} \\ -3 \cdot \text{Augenzahl} : & \text{— " — ung.} \end{cases}$$

Ergebnis	1	2	3	4	5	6
Gewinn	-3	4	-9	8	-15	12

Def.: Zufallsvariable auf Ω ist Abbildung:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

Bem.:

(i) Notation: Grossbuchstaben: $X, Y, Z, \ldots$

(ii) keine Variable, nicht zufällig
↓ Abbildung
↳ nur Exp., i.e. $\omega \in \Omega$ ist zufällig
$X(\omega)$ ist eindeutig bestimmt.

(iii) Interpretation als Gewinn / Verlust eines Glücksspiels stets möglich.
↓ ω zufällig aus Ω auswählen, dann $X(\omega)$ = Gewinn / Verlust

(iv) Neue Zufallsvar. aus gegebenen:

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	-3	4	-9	8	-15	12
$Y(\omega) = 2X(\omega) + 1$	-5	9	-17	17	-29	25

(v) Meist Ω nicht näher spezifiziert.

Bsp: "X bezeichnet # Mädchen in Familien mit 4 Kindern".

$\longrightarrow$ Ω: Fam. mit 4 Kindern

ω: eine Fam. ($\omega \in \Omega$)

$X(\omega)$ = # Mädchen ($X(\omega) \in \{0,1,2,3,4\}$)

(vi) Zufallsvar. die nur endlich viele (oder abzählbar ∞-viele) Werte annehmen heißen <u>diskret</u>.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

<u>Idee</u>: Zuordnung:

Werte von $X \longrightarrow$ Wahrsch. für diesen Wert

<u>Bsp.</u>: Münze 3mal werfen, Gewinn = # Köpfe:

ω	KKK	KKZ	KZK	ZKK	KZZ	ZKZ	ZZK	ZZZ
$P(\omega)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$X(\omega)$	3	2	2	2	1	1	1	0

mögliche Werte von $X = 4$

Betrachte z.B. Wert $X(\omega) = 1$:

zugehöriges Ereignis: $E = \{KZZ, ZKZ, ZZK\}$

$\longrightarrow P(E) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Wir erhalten:

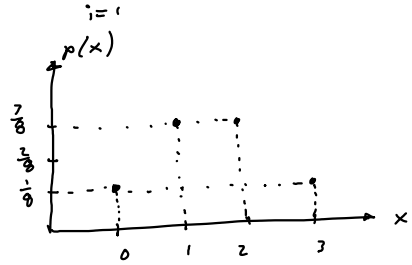
Wert von X: x_i	0	1	2	3
Wahrsch.: $\underbrace{P(X = x_i)}_{p_i}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

<u>Def.</u>: Zuordnung: $x_i \longmapsto p_i = P(X = x_i)$ heißt <u>Wahrscheinlichkeitsverteilung</u>

Die p_i erfüllen: (i) $0 \leq p_i \leq 1$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Graphische Darstellung:



<u>Bsp.</u>: Würfeln mit 2 Würfeln.

X = Summe der Augenzahlen

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,1) \; \ldots \; \vdots$
$\vdots$
$(6,1) \; \ldots \; (6,6)\}$

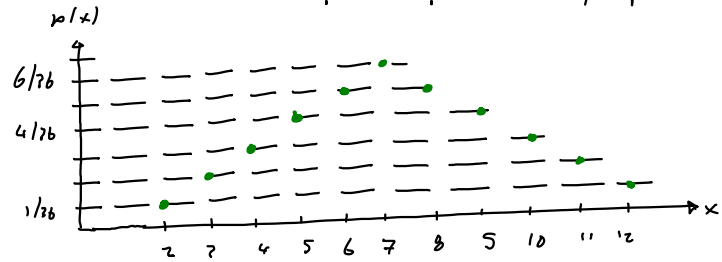
$= \{ (i,j) : i,j = 1,2,3,\dots,6 \}.$

Mögliche Werte von X: $2,3,4,\dots,12$

<u>Aufgabe:</u> Wahrsch.-Vert.

<u>Lösg.:</u>

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



<u>Def.:</u> $F_X(x) = P(X \le x)$ heisst <u>kumulative Verteilungsfkt.</u>

I.e. $F_X(x)$ ist Wahrsch., dass X höchstens gleich x ist.

<u>Bem.:</u> $F_X(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Im Bsp.: Münze 3mal werfen, X = Gewinn = # Kopf

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

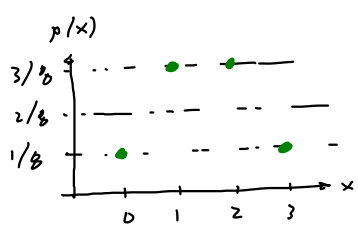
$P(X < 0) = 0 \longrightarrow F_X(x) = 0$ für $x < 0$

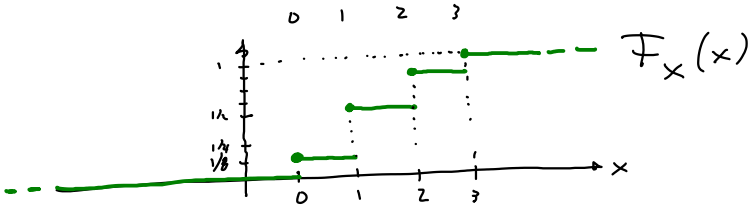
$F_X(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$

$F_X(1) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$
$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

$F_X(2) = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

$F_X(3) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
$= \dots = \underline{1}$





Aufgabe:

(Qualitative) Dart. $F_X(x)$

für Bsp. Würfeln mit 2 Würfeln

$X = \Sigma$ Aug.-Zahl.

Lösg.: