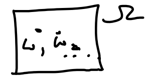
Wiederholung:

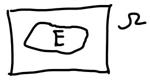
Zufallsexp. $\longrightarrow$ Ergebnisse ω_i

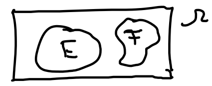


Menge der Ergebnisse = Stichprobenraum Ω

$\omega_i \in \Omega$

$E \subset \Omega$: Ereignis





E, F unvereinbar, falls $E \cap F = \{\}$

$\mathcal{P}(\Omega)$ = Menge aller Ereignisse = Menge der Teilmengen von Ω.

Fkt. $P: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Wahrsch., falls:

(i) $0 \le P(E) \le 1$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) E, F unvereinbar $\longrightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

Ω, P : Wahrscheinlichkeitsraum

Bem.: Obige Def. von Wahrsch. liefert keine Methode zur Berechnung von P

$\longrightarrow$
- Modell
- Exp.
- Daten

Bsp.: Wurf einer Münze

$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$

sicheres Ereignis

$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{\text{Kopf}\}, \{\text{Zahl}\}, \{\}, \Omega\}$

unmögliches Ereignis

Axiome: $P(\Omega) = 1$

Da $\Omega \cap \{\} = \{\}$ (unvereinbar)

$$\longrightarrow \underbrace{P(\underbrace{\Omega \cup \{\}}_{= \Omega})}_{P(\Omega) = 1} = \underbrace{P(\Omega)}_{= 1} + P(\{\}) \longrightarrow P(\{\}) = 0$$

Da $\{\text{Zahl}\} \cap \{\text{Kopf}\} = \{\}$ (unvereinbar)

$$\longrightarrow \underbrace{P(\underbrace{\{\text{Zahl}\} \cup \{\text{Kopf}\}}_{= \Omega})}_{P(\Omega) = 1} = P(\{\text{Zahl}\}) + P(\{\text{Kopf}\}) \longrightarrow P(\{\text{Zahl}\}) = 1 - P(\{\text{Kopf}\})$$

Aber: $P(\{\text{Kopf}\}) = \,?$ $\longrightarrow$ Durch
- Modellbildung
- Daten
- Versuche

Bsp.: Nehmen an, Münze zeigt zweimal so oft Kopf wie Zahl $\longrightarrow$ $P(\{Kopf\}) = \frac{2}{3}$

$P(\{Zahl\}) = \frac{1}{3}$

Satz: Seien $E, F \subset \Omega$

Es gilt:

(i) $P(E^c) = 1 - P(E)$

(ii) $P(\{\}) = 0$

(iii) $E \subset F \longrightarrow P(E) \leq P(F)$

(iv) $P(E \setminus F) = P(E) - P(E \cap F)$

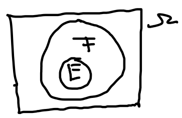
(v) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Beweis: (i) $E \cap E^c = \{\}$ (unvereinbar)

$\longrightarrow \underbrace{P(\underbrace{E \cup E^c}_{=\Omega})}_{P(\Omega)=1} = P(E) + P(E^c)$

$\longrightarrow \underline{P(E^c) = 1 - P(E)}$

(iii) $E \subset F$



Schreiben: $F = (F \setminus E) \cup E$

haben: $(F \setminus E) \cap E = \{\}$ (unvereinbar)

$\longrightarrow \underbrace{P(\underbrace{(F \setminus E) \cup E}_{F})}_{P(F)} = P(F \setminus E) + P(E)$

$\longrightarrow P(E) = P(F) - \underbrace{P(F \setminus E)}_{\geq 0}$

$\leq P(F)$

Aufgabe: Anne geht in Ferien & nimmt 2 Bücher mit.

Mit Wahrsch. 0.5 mag sie 1. Buch

— " — 0.4 — " — 2. — " —

— " — 0.3 — " — beide Bücher

Ges.: Wahrsch. dass sie keines der Bücher mag.

Lösg.: Sei E: Sie mag Buch 1

F: Sie mag Buch 2

$\longrightarrow P(E) = 0.5$

$P(F) = 0.4$

$P(E \cap F) = 0.3$

$P(\underbrace{E \cup F}_{\text{sie mag eines der Bücher}}) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$= 0.5 + 0.4 - 0.3$

$= 0.6$

$P(\underbrace{(E \cup F)^c}_{\text{sie mag keines der Bücher}}) = 1 - P(E \cup F) = 1 - 0.6 = \underline{\underline{0.4}}$

Gleichwahrsch.

Def.: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$
zusammen mit P heisst Laplaceraum, falls:

$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$

i.e. alle Ergebnisse sind gleichwahrsch.

Bsp.: (i) Münzwurf ideale Münze $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$.

(ii) Idealen Würfel $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

(iii) Eine Person wird aus 100 Personen zufällig ausgewählt.

↳ alle Personen gleichwahrsch.

Konsequenzen:

Notation für # Elemente einer endlichen Menge

(i) $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$, wobei $n = |\Omega|$

(ii) Sei $E \subset \Omega$

$$\longrightarrow P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\#\text{ günstige Fälle}}{\#\text{ mögliche Fälle}}$$

Aufgabe: Restaurant, 8 Tische, je 4 Plätze.
1 Platz besetzt (1. Gast)
2. Gast entscheidet sich willkürlich für einen Platz.

Ges.: Wahrsch. dass beide am selben Tisch sitzen.

Lösg.: # Plätze frei $= 8 \cdot 4 - 1 = 31$ = # mögliche Fälle

günstige Fälle = 3 (Plätze am Tisch mit 1. Gast)

$$\longrightarrow \underline{P(E) = \frac{3}{31}}$$

Aufgabe: Würfeln mit 2 Würfeln.
Betrachten Summe der Augenzahlen.

(i) Was ist Ω?

(ii) Laplace-Raum?

(iii) Was muss betrachtet werden für Laplace-Raum?

Lösg.: (i) $\Omega = \{2,3,4,5,6,\dots,12\}$

(ii) Nein! $P(\{2\}) < P(\{7\})$

(iii) $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$

$$= \{(1,1),(1,2),(1,3),\dots,(1,6),$$
$$(2,1),(2,2),\dots\dots$$
$$\vdots$$
$$(6,1),(6,2),\dots\dots(6,6)\}$$

$|\Omega| = 36$, alle gleich-wahrsch. !

<u>Aufgabe</u>: Kommitee von 5 Personen wird aus Gruppe von 6 Männen & 9 Frauen zufällig ausgewählt.

<u>Ges</u>: Wahrsch. für Komitee aus 3 Männer & 2 Frauen besteht.

<u>Lösg.</u>: # mögliche Komitees $= \binom{15}{5}$

günstige Komitees $= \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{\# Auswahlen Männer}} \cdot \underbrace{\binom{9}{2}}_{\text{\# Auswahlen Frauen}}$