Wahrscheinlichkeitsrechnung

Was ist Warscheinlichkeit?

(i) Idealen Würfel

$$\text{Wahrsch. für eine } 3 = \frac{\#\text{ günstige Fälle}}{\#\text{ mögliche Fälle}} = \frac{1}{6}$$ klassisch

(ii) Nicht idealen Würfel

Wahrsch. für eine 3 ?

Idee: Würfeln !

Tabelle:

# Würfe	# 3	Wahrsch
100	15	0.15
500	80	0.16
1000	151	0.157
9010	1461	0.162
12'000	1940	0.162
		⋮
		0.162

$\longrightarrow$ Wahrsch. = 0.162 hypothetischer Grenzwert

(iii) Geburt in 2009

Ann.: Person in 2009 in CH geboren.

Ges: Wahrsch. für männlich?

Idee: Daten: Geburten in 2009 in CH:

Mädchen: 37979

Knaben: 40407

total: 78286

$\longrightarrow$ Wahrsch. = rel. Häufigkeit

$$= \frac{40'407}{78'286} = 0.516 = 51.6\,\%$$

empirische Wahrsch.

Axiomatischer Aufbau

Grundlage: Zufallsexp. mit möglichen Ergebnissen.

Def.: Menge aller möglichen Ergebnisse heisst Stichprobenraum oder Grundmenge.

Bezeichnung: Ω — Ergebnisse

Elemente in Ω: $\omega \in \Omega$

Bsp: Exp. Wurf mit Würfel $\{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\} = \Omega$

$\longrightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Bsp: Geburt: $\Omega = \{$ Knabe, Mädchen $\}$

Bsp: Münze werfen: $\Omega = \{$ Kopf, Zahl $\}$. $\{K, Z\}$

Def: Eine Teilmenge von Ω heisst Ereignis.
Bezeichnung: $E \subset \Omega$.

Bsp: Wurf mit Würfel $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ereignisse: (Bsp.)

(i) Zahl ist gerade: $E_{(i)} = \{2, 4, 6\}$

(ii) Zahl ungerade: $E_{(ii)} = \{1, 3, 5\}$

(iii) Zahl ist gleich 2: $E_{(iii)} = \{2\}$

(iv) Zahl ist ≤ 7: $E_{(iv)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(v) Zahl ist neg.: $E_{(v)} = \{\}$.

Spezielle Ereignisse:

Sicheres Ereignis: $E = \Omega$

Unmögliches Ereignis: $E = \{\}$

Gegenereignis zu E: E^c

Elementarereignis: $E = \{\omega\}$.

Zwei Ereignisse E, F heissen unvereinbar, falls $E \cap F = \{\}$.

Wahrscheinlichkeit

Sei Ω Stichprobenraum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller Ereignisse, i.e. die Potenzmenge von Ω.

$\|$

(Menge der Teilmengen)

Eine Funktion $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Wahrsch., falls sie die folgenden Axiome erfüllt:

(i) $0 \leq P(E) \leq 1$ für $E \subset \Omega$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) Wenn E, F unvereinbar ($E \cap F = \{\}$)

dann gilt: $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

Ein Stichprobenraum Ω zusammen mit einer Wahrsch. P heisst Wahrsch.-Raum.

Bem.: Obige Def. charakterisiert P durch Eigenschaften, aber liefert keine Methode zur Berechnung von P. Diese wird durch Modellbildung, statistische Erhebung oder Versuche bestimmt.