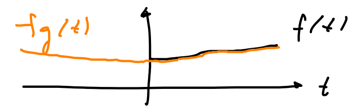
Fourier-Kosinus-Trafo (FKT)



Geg: $f: [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Sei $f_g(t) = \begin{cases} f(t) & : t \geq 0 \\ f(-t) & : t < 0 \end{cases}$

FT von $f_g(t)$ heisst FKT, Notation: $\hat{f}_K(s)$.

$$\hat{f}_g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_g(t)\, e^{-j2\pi st}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f_g(t)}_{=f(-t)} e^{-j2\pi st}\, dt + \int_0^{\infty} f_g(t)\, e^{-j2\pi st}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(u)\, e^{j2\pi su}\, du + \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-j2\pi st}\, dt$$

$$e^{j2\pi st} + e^{-j2\pi st} = 2\cos(2\pi st)$$

$$= \underline{2\int_0^{\infty} f(t) \cos(2\pi st)\, dt}$$

gerade $\longrightarrow$ $\hat{f}_g(s)$ gerade

I.e. $\underline{\hat{f}_K(s) = 2\int_0^{\infty} f(t) \cos(2\pi st)\, dt}$

Inverse: $f_g(t)$ gerade $\longrightarrow$ $\hat{f}_g(s)$ gerade

$$\longrightarrow \underline{\hat{\hat{f}}_g(t) = 2\int_0^{\infty} \hat{f}_g(s) \cos(2\pi st)\, ds}$$

(gleiche Formel nochmals!)

Dualität: $\check{g}(t) = \hat{g}(-t)$ mit $g = \hat{f}_g$

$$\longrightarrow \underbrace{\check{\hat{f}}_g(t)}_{= f_g(t)} = \underbrace{\hat{\hat{f}}_g(-t)}$$

$$= 2\int_0^{\infty} \hat{f}_g(s) \cos(2\pi s(-t))\, ds$$

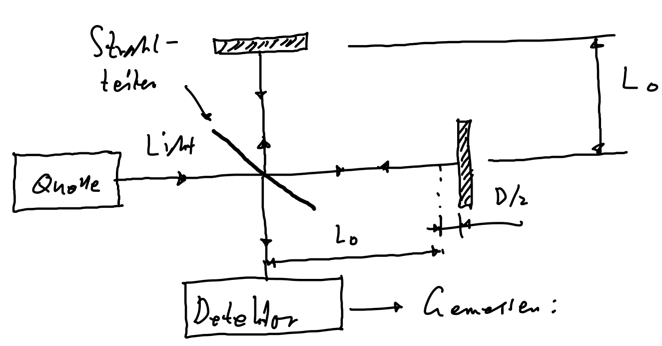
$$= \underline{2\int_0^{\infty} \hat{f}_g(s) \cos(2\pi st)\, ds}$$

$$\longrightarrow \underline{f_g(t) = 2\int_0^{\infty} \underbrace{\hat{f}_g(s)}_{\hat{f}_K(s)} \cos(2\pi st)\, ds}$$

I.e. für $t \in [0, \infty)$:

$$\underline{f(t) = 2\int_0^{\infty} \hat{f}_K(s) \cos(2\pi st)\, ds}$$

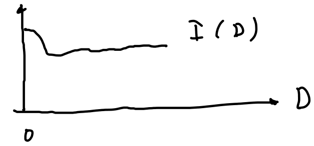
Fourier-Spektroskopie



rechten Spiegel: verschiebbar

$\longrightarrow$ Gemessen:

Gemessen: Intensität des Lichts in Abh. von Spiegelpos. D:



Gesucht: Intensitätsverteilung Quelle

Welle: $A\cos(kx-\omega t)$

schreiben dies als: $\underline{A e^{i(kx-\omega t)}}$

Falls Quelle monochromatisch $\to$
In Detektor trifft Überlagerung ein:

$$A e^{i(kx-\omega t)} + A e^{i(k(x+\underset{\uparrow}{D})-\omega t)}$$

optische Wegdifferenz

$$= A e^{i(kx-\omega t)}\left(1+e^{ikD}\right)$$

$$= A e^{i(kx-\omega t)} e^{i\frac{kD}{2}}\left(e^{-i\frac{kD}{2}}+e^{i\frac{kD}{2}}\right)$$

$$= \underbrace{2A\cos\left(\frac{kD}{2}\right)}_{\text{Amplitude}} e^{i(\underbrace{kx-\omega t+\frac{kD}{2}}_{\text{Phase}})} = (*)$$

$$\longrightarrow \quad \text{Intensität} = 4A^2\cos^2\left(\frac{kD}{2}\right) \qquad \cos^2(\varphi) = \tfrac{1}{2}(1+\cos(\varphi))$$

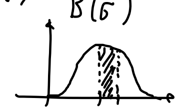
$$\begin{array}{c} \| \\ |(*)|^2 \end{array} \quad = 2A^2(1+\cos(kD))$$

$$= \boxed{\underbrace{2A^2}_{}}(1+\cos(2\pi D\sigma))$$

$\uparrow$ Intensität der Welle mit Frequenz ω

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ (sowas wie die Frequenz)

Sei $B(\sigma)$: Intensitätsverteilung der Quelle in Abh. von σ.



$\longrightarrow$ $B(\sigma)d\sigma$: Intensität Quelle im Bereich $[\sigma, \sigma+d\sigma]$.

$\longrightarrow$ **Totale Intensität** (gemessen):

$$I(D) = \int_0^\infty \boxed{B(\sigma)}(1+\cos(2\pi D\sigma))\,d\sigma$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty B(\sigma)d\sigma}_{} + \int_0^\infty B(\sigma)\cos(2\pi D\sigma)\,d\sigma$$

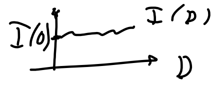
Falls Pfade gleich lang: $I(0) = \int_0 B(\sigma)d\sigma + \int_0 B(\sigma)d\sigma$

$$= 2\int_0^\infty B(\sigma)d\sigma$$

$$\longrightarrow \quad I(D) = \frac{1}{2}I(0) + \int_0^\infty B(\sigma)\cos(2\pi D\sigma)\,d\sigma$$

$$\longrightarrow \quad I(\underset{\uparrow}{D}) - \frac{1}{2}I(0) = \underbrace{\int_0^\infty B(\sigma)\cos(2\pi D\sigma)\,d\sigma}_{} \longrightarrow \text{FKT von } B(\sigma)$$

Spiegel wird verschoben & $I(D)$ aufgezeichnet



Inverse: $\longrightarrow$

$$B(\sigma) = \int_0^\infty \left(I(D) - \frac{1}{2} I(0) \right) \cos(2\pi \sigma D)\, dD$$

Fundamentale Gl. der FT-Spektroskopie!