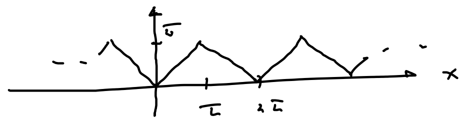
Wiederholung: Integral FR:

$$\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\int \dots dt"'] & a_0 = 0,\ a_n,\ b_n \arrow[d] \\
F(t) = \int f(\tau)d\tau \arrow[r, "\mathcal{F}"] & 2C,\ -\frac{b_n}{n\omega},\ \frac{a_n}{n\omega}
\end{tikzcd}$$

Ableitung FR:

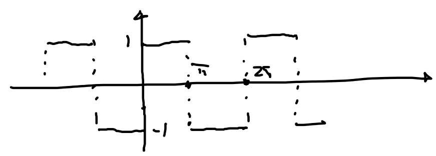
$$\begin{tikzcd}
f(t) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\frac{d}{dt}"'] & a_0,\ a_n,\ b_n \arrow[d] \\
\frac{df}{dt}(t) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & 0,\ n\omega b_n,\ -n\omega a_n
\end{tikzcd}$$

Aufgabe: Geg: FR: $d(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ ug.}} \frac{\cos(nx)}{n^2}$



Ges: Skizze $\frac{dd}{dx}(x)$; FR dazu

Lösg.:



$$\frac{dd}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ ug.}} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ ug.}} \frac{\sin(nx)}{n}$$

Was passiert bei Ableitung von Rechteck?

$$\frac{d^2 d}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ ug.}} \frac{\sin(nx)}{n}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ ug.}} \cos(nx)$$

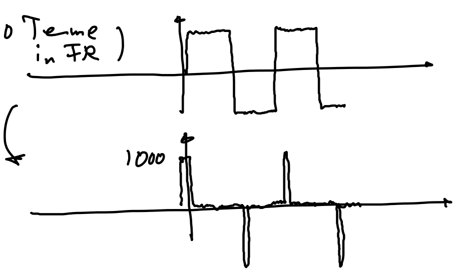
$$= \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \dots\right)$$

π π π

$\longrightarrow$ ex. nicht bei π!

(~100 Terme in FR)

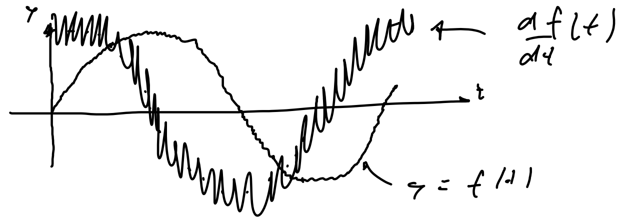
$\frac{d}{dx}$



Bemerkungen: (i) Ableitung führt zu Mult. der Koeff. a_n, b_n mit $\pm n\omega$

$\longrightarrow$ Hochfrequenzanteile werden verstärkt (diese enthalten meist das Rauschen!)

$\longrightarrow$ unerwünschtes Problem!



(ii) Umgekehrter Effekt bei Integral

$\hookrightarrow$ macht Fkt. regulärer!

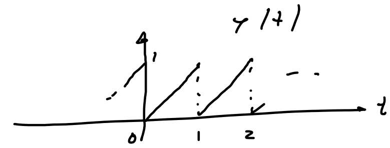
(iii) Ableitung / Integral der $\mathbb{C}$-FR funktioniert analog $\longrightarrow$ Koeff. werden mit $jn\omega$ mult. (Ableitung) resp. mit $\frac{1}{jn\omega}$ (Integral).

<u>Anwendung auf DGL:</u>

<u>Illustration an Bsp:</u> $\quad \frac{dx}{dt}(t) + x(t) = y(t) \quad (*)$

mit $y(t) = t \; : \; t \in [0,1)$

y : 1-per. $\left(T = 1,\; \omega = 2\pi\right)$



$\longrightarrow$ FR für $y(t)$: $\quad y(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n\pi} \sin(n2\pi t)$

<u>Idee:</u> Suchen $x(t)$ als FR mit gleicher Grundfrequenz: $\omega = 2\pi$

I.e. machen Ansatz: $\quad x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n2\pi t) + b_n \sin(n2\pi t)\right)$

Einsetzen in DGL $(*)$: benötigen $\frac{dx}{dt}(t)$:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-n2\pi a_n \sin(n2\pi t) + n2\pi b_n \cos(n2\pi t)\right)$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n2\pi a_n \sin(-) + n2\pi b_n \cos(\ldots)\right)}_{\frac{dx}{dt}(t)} + \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\ldots) + b_n \sin(\ldots)\right)}_{x(t)} = \underbrace{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n\pi} \sin(\ldots)}_{y(t)}$$

Linke Seite nach cos- & sin- Termen:

$$\boxed{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\boxed{(n2\pi b_n + a_n)}\cos(\ldots) + \boxed{(b_n - n2\pi a_n)}\sin(\ldots)\right) = \boxed{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{-\frac{1}{n\pi}} \sin(\ldots) \quad \boxed{0}$$

Koeff.-Vergleich (von sin- & cos- Termen): $\begin{cases} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} & (1) \\ n2\pi b_n + a_n = 0 & (2) \\ b_n - n2\pi a_n = -\frac{1}{n\pi} & (3) \end{cases}$

(1) Gl.-System

(2) für a_0, a_n, b_n

(3)

$(1) \longrightarrow \underline{a_0 = 1}$

$$(2) \longrightarrow a_n = -n2\pi b_n \overset{(3)}{=} -n2\pi\left(n2\pi a_n - \frac{1}{n\pi}\right)$$

I.e. $\underline{a_n} = -4\pi^2 n^2 a_n + 2 \longrightarrow \underline{a_n = \frac{2}{1+4\pi^2 n^2}}$

$$(2) \longrightarrow \underline{b_n} = -\frac{a_n}{n2\pi} = -\frac{1}{n\pi(1+4\pi^2n^2)} = -\underline{\frac{1}{n\pi + 4\pi^3 n^3}}$$

$$\longrightarrow \underline{x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1+4\pi^2n^2}\cos(n2\pi t) - \frac{1}{n\pi+4\pi^3n^3}\sin(n2\pi t)\right)}$$

<u>Bemerkungen:</u> (i) Es handelt sich um part. Lösg.

$\longrightarrow$ dies ist stationäre Lösg. (i.e. für $t \to \infty$)

(ii) Komplexe Schreibweise:

$$y(t) = \sum_n c_n e^{jn\omega t}$$

Ansatz: $x(t) = \sum_n d_n e^{jn\omega t} \longrightarrow \frac{dx}{dt}(t) = \sum_n jn\omega d_n e^{jn\omega t}$

Einsetzen in DGL: $3x'(t) + x(t) = y(t)$:

$$3\underbrace{\sum_n jn\omega d_n e^{jn\omega t}}_{x'(t)} + \underbrace{\sum_n d_n e^{jn\omega t}}_{x(t)} = \underbrace{\sum_n c_n e^{jn\omega t}}_{y(t)}$$

$$\longrightarrow \sum_n \underline{(3jn\omega + 1)d_n} e^{jn\omega t} = \sum_n \underline{c_n} e^{jn\omega t}$$

$$\longrightarrow (3jn\omega + 1)d_n = c_n \longrightarrow \boxed{d_n = \frac{c_n}{1+3jn\omega}}$$

(iii) Zusammenhang zu Laplace-Trafo:

$$\frac{dx}{dt}(t) + x(t) = y(t)$$

Transfktn.: $\mathcal{L}(\ldots)$ mit $x(0) = 0$, $y(0) = 0$

$$\longrightarrow sX(s) + X(s) = Y(s)$$

$$\longrightarrow X(s) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+s}}}_{=G(s):\ \text{Transfktn.}} Y(s)$$

$$\longrightarrow \boxed{d_n = G(jn\omega)c_n}$$

Was ist ein Ton:

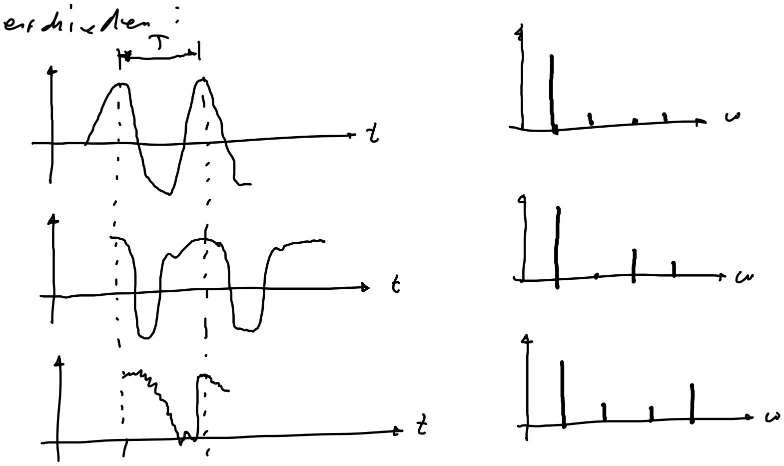
Kammerton a: 440 Hz

Wieso klingen Instrumente verschieden:

Flöte:

Piano:

Trompete:



gleiche Periode, andere Obersch.

Ohr: