Wiederholung:

Komplexe Darstellung der FR:

reell: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$

$$a_0 = \dots \; ; \; a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\,dt \; ; \; b_n = \dots$$

Komplex: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \; ; \; c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t}\,dt$

Umrechnung: $c_0 = \frac{a_0}{2} \; ; \; c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \; ; \; c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n) \quad (n \in \mathbb{N})$

$$(c_n = \overline{c_{-n}})$$

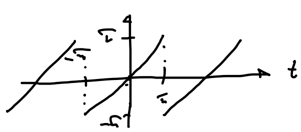
$$a_0 = 2 c_0 \; ; \; a_n = 2 \operatorname{Re}(c_n) \; ; \; b_n = -2 \operatorname{Im}(c_n)$$

Aufgabe: Sei $f(t) = t$ für $t \in [-\pi, \pi)$; $f(t)$ sei 2π - per.

Ges: FR in komplexer Darstellung.

$$\left[\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \qquad \sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \right]$$

Lösg.: $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} \underset{\substack{T = 2\pi \\ \to \omega = 1}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-jnt}\,dt$



$$\underset{n \neq 0}{=} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{t\, e^{-jnt}}{-jn} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jnt}}{-jn}\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{-jn} \left(e^{-jn\pi} + e^{jn\pi} \right) + \frac{e^{-jnt}}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{-jn} \underbrace{2\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} + \frac{1}{n^2} \underbrace{\left(e^{-jn\pi} - e^{jn\pi} \right)}_{= -2j \sin(n\pi) = 0} \right)$$

$$= \frac{j}{n} (-1)^n \quad (n \neq 0) \qquad c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt = 0$$

$$\longrightarrow f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{j}{n} (-1)^n e^{jnt}$$

Zeitverschiebung

Sei $f(t)$ eine T-per. Fkt.

Betrachten $g(t) = f(t-a)$.

Seien c_n die Fourierkoeff. von $f(t)$

— " — $\tilde{c}_n$ ———— " ———— $g(t)$

Wir haben: $\tilde{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)\, e^{-jn\omega t}\,dt$

$$= \frac{1}{T} \int_a^{T+a} f(t-a)\, e^{-jn\omega t}\,dt$$

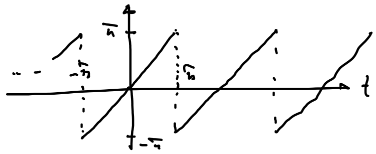
$$\underset{u=t-a}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-jn\omega(u+a)}\, du$$

$$= e^{-jn\omega a}\,\frac{1}{T}\int_0^T f(u)\, e^{-jn\omega u}\, du = \underline{e^{-jn\omega a}\, c_n}$$

$\longrightarrow$ <u>Phasenverschiebung!</u> <u>$|c_n|$ bleibt gleich!</u>

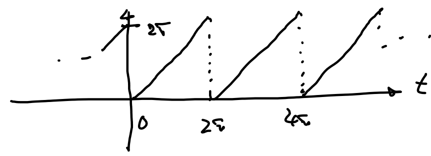
<u>Bsp:</u> Bestätigen (reelle) FR für Sägezahn aus obiger Aufgabe:

Wir wissen



$$\longrightarrow f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{j}{n}(-1)^n e^{jnt}$$

$g(t)$:



$$\longrightarrow g(t) = f(t-\pi) + \pi$$

$$= \pi + \sum_{n\neq 0} \frac{j}{n}(-1)^n e^{jn(t-\pi)}$$

$$= \pi + \sum_{n\neq 0} \underline{\frac{j}{n}(-1)^n e^{-jn\pi}}\, e^{jnt}$$

$$\longrightarrow c_0 = \pi$$

$$c_n = \frac{j}{n}(-1)^n \underbrace{e^{-jn\pi}}_{=(e^{-j\pi})^n = (-1)^n} = \frac{j}{n}(-1)^{2n} = \frac{j}{n}$$

$$\longrightarrow a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n) = 0$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n) = -\frac{2}{n}$$

$$a_0 = 2\pi$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\ldots) + b_n \sin(\ldots)\right)$$

$$\longrightarrow \underline{g(t) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}}$$

<u>Wichtige Bemerkung:</u>

Können FR schreiben als:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

mit: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \underset{\uparrow}{=} 2|c_n|$ $\quad(\varphi_n = \arctan(-\frac{b}{a}))$

Aufgabe

$\longrightarrow$ A_n ändert sich nicht bei Zeitverschiebung!

$\longrightarrow$ "Anteile der Frequenzen" ändern sich nicht!

<u>Spektrum:</u>

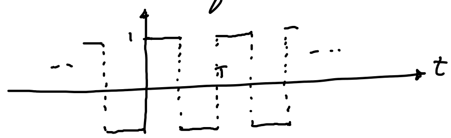
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

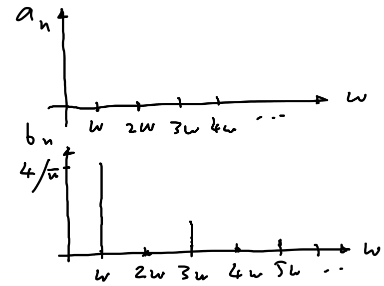
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

Koeff. a_n, b_n, c_n heissen <u>Amplituden</u>

Grafische Darstellung: <u>Spektrum</u>:

Bsp: Rechtecksignal:



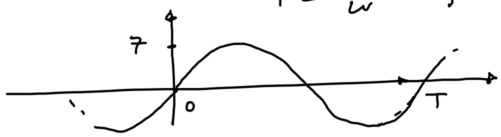


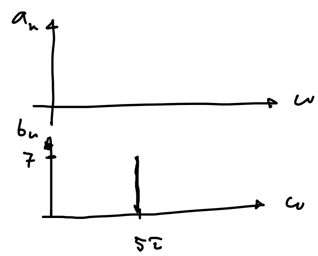
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \dots\right)$$

$\boxed{\text{Zeitbereich}} \rightleftarrows \boxed{\text{Frequenzbereich}}$

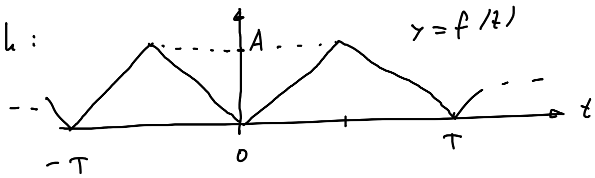
Bsp: $f(t) = 7\sin(5\pi t)$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{5}$$





Aufgabe: Dreieck:



Ges: Spektrum

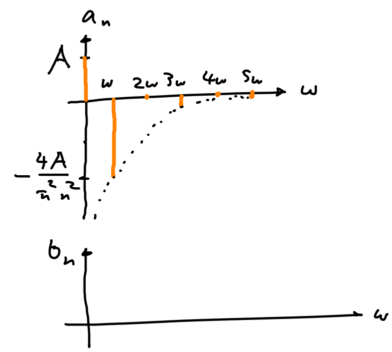
$$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2}\sum_{n \text{ ung.}} \frac{1}{n^2}\cos(n\omega t)$$

Lösg.:

$a_0 = A$

$a_n = -\frac{4A}{\pi^2 n^2}$ für n ung.

$b_n = 0$



Aufgabe: Sei $f(t) = 7\sin(\omega t) - 11\cos(3\omega t) + 2$

Ges: Spektrum

Lösg.: