Wiederholung

Erste Eigenschaften

(i) $f \xrightarrow{\mathcal{F}} a_0, a_n, b_n$

$f + c \xrightarrow{\mathcal{F}} a_0 + 2c, a_n, b_n$

(ii) $cf \xrightarrow{\mathcal{F}} ca_0, ca_n, cb_n$

(iii) mit $g \xrightarrow{\mathcal{F}} a_0^*, a_n^*, b_n^*$ (Bem.: f, g besitzen selbe Periode T).

$f + g \xrightarrow{\mathcal{F}} a_0 + a_0^*, a_n + a_n^*, b_n + b_n^*$

(ii) & (iii) Linearität

FR für T-per. Fkt.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

mit:
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\,dt$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\,dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\,dt$$

Parität

f gerade $\longrightarrow$ $f(-x) = f(x)$

$$\int_{-\tau}^{\tau} f(x)\,dx = 2 \int_0^{\tau} f(x)\,dx$$

f ung. $\longrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-\tau}^{\tau} f(x)\,dx = 0$$

$\longrightarrow$ FR einer geraden Fkt. $f(t)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t)\,dt \quad ; \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\,dt$$

FR einer ung. Fkt. $f(t)$:

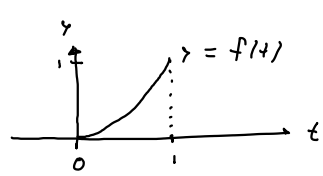
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\,dt$$

Erweiterungen

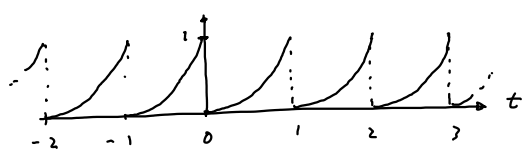
Sei $f(t)$ definiert für $t \in [0, \tau)$

Bsp: $f(t) = t^2$ für $0 \le t < \tau = 1$.



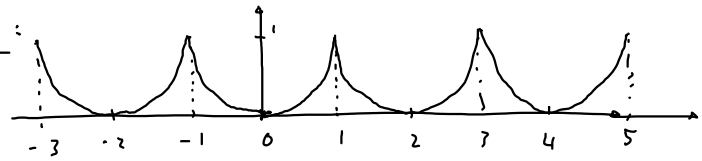
Definieren daraus period. Fkt:
Drei Möglichkeiten:

(i) periodische Erweiterung:



$\longrightarrow$ Periode: $T = \tau = 1$

(ii) Gerade Erweiterung:



$\longrightarrow$ Periode: $T = 2\tau = 2$

$f(t)$ gerade

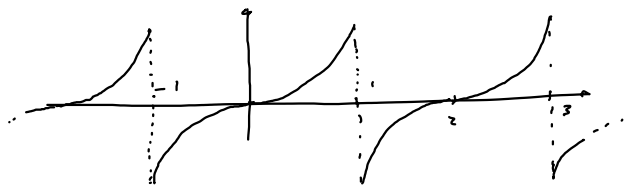
$\longrightarrow$ $b_n = 0$

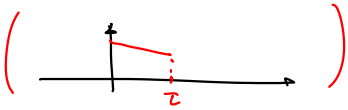
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\,dt$$

FR heisst Fourier-Kosinus-Reihe

(iii) Ungerade Erweiterung





$\longrightarrow$ Periode: $T = 2\tau = 2$

$f(t)$ ung.

$\longrightarrow$ $a_0 = 0$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

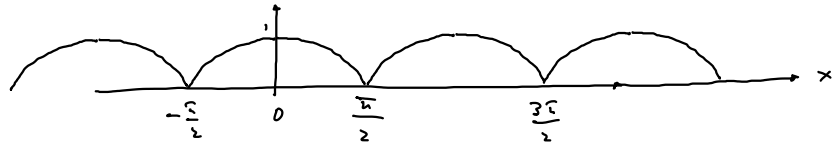
FR heisst Fourier-Sinus-Reihe

Aufgabe: Sei $f(x) = \cos(x)$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

Ges: Fourier-Kosinusreihe.

$$\left[\text{Hinweis: } \int_0^{\pi/2} \cos(x)\cos(mx)\,dx = -\frac{\cos(\frac{m\pi}{2})}{m^2-1}\right]$$

Lösg.: Gerade Erweiterung:



$\tau = \frac{\pi}{2} \longrightarrow T = \pi$

$\longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$

$b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(x)\cos(n\omega x)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x)\cos(2nx)\,dx \overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{4}{\pi}\left(-\frac{\cos(n\pi)}{(2n)^2-1}\right)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi((2n)^2-1)} & : n \text{ gerade} \\[2ex] \dfrac{4}{\pi((2n)^2-1)} & : n \text{ ung.} \end{cases}$$

$a_0 = \frac{4}{\pi}$.

$$\longrightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2-1}(-1)^{n+1}\cos(2nx)$$

Komplexe Darstellung der FR

$j^2 = -1 \longrightarrow j = -\frac{1}{j}$

$\frac{1}{2j} = -\frac{j}{2}$

$-\frac{1}{2j} = \frac{j}{2}$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(a_n - jb_n) e^{jn\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n) e^{-jn\omega t} \right)$$

Wir definieren: $c_0 = \frac{a_0}{2}$; $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$; $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$ || Komplexe Fourier-Koeff

$$\longrightarrow \boxed{f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}}$$ || Komplexe FR

Formeln für c_0, c_n, c_{-n}:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overbrace{e^{j0\omega t}}^{=1} dt$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\,dt - \frac{j}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left(\underbrace{\cos(n\omega t) - j \sin(n\omega t)}_{= \cos(-n\omega t) + j \sin(-n\omega t) = e^{-jn\omega t}} \right) dt \quad \left[\begin{array}{ll} \cos & \text{gerade} \\ \sin & \text{ung.} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t}\,dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left(\cos(n\omega t) + j \sin(n\omega t) \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jn\omega t}\,dt$$

$\longrightarrow$ Alle komplexen Fourierkoeff. durch selbe Formel gegeben!

I.e.
$$\boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t}\,dt}$$

Bem:

(i) $c_{-n} = \overline{c_n}$

(ii) Darstellungen (reell, komplex) sind gleichwertig.

Vorteil reell: Falls Fkt. gerade / ung.

Vorteil komplex: kompakt.

(iii) komplex $\longrightarrow$ reell:

$a_0 = 2c_0$

$a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n)$

$b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n)$