Fourierreihen

$\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ haben Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\sin(2\omega t)$, $\sin(3\omega t)$, $\sin(4\omega t)$, ...

$\cos(2\omega t)$, $\cos(3\omega t)$, $\cos(4\omega t)$, ... haben auch Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\longrightarrow$ jede endliche Lin.-Komb. dieser Fkt., z. B.:

$$g(t) = \sin(\omega t) + \frac{7}{2}\cos(7\omega t) - 5\sin(17\omega t)$$ hat auch Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Erweiterung auf "∞-viele" Terme:

<u>Def:</u> <u>Trigonometrische Reihe</u> ist Ausdruck der Form:

$$\underline{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)} \quad \left[= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\dots)\right]$$

$a_0, a_1, a_2, \dots$
$b_1, b_2, \dots$: <u>Koeff.</u> der trig. Reihe

t : <u>Variable</u>

Falls diese Reihe existiert

$\longrightarrow$ Grenzfunktion (obiger Ausdruck) hat auch die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

<u>Betrachten im Folgenden 2π-periodische Fkt. $f(x)$</u>

(als Variable verwenden wir x)

Nehmen an:
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$
(i.e. nehmen an dass sich $f(x)$ so schreiben lässt)

und suchen Formeln für die Koeff. a_n, b_n.

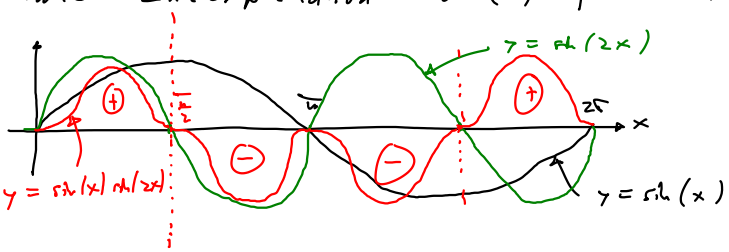
<u>Orthogonalitätsrelationen:</u> Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \qquad (1)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \qquad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0 \qquad (3)$$

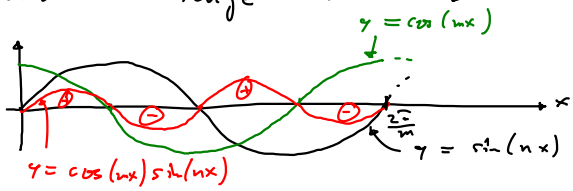
Graphische Interpretation von (2) für $m=1$, $n=2$:



$$\longrightarrow \int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(2x)\,dx = 0$$

<u>Aufgabe:</u> Man zeichne (3) $\left(\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx\right)$ für $m=n$ und überzeuge sich dass Ausdruck verschwindet $(=0)$.

<u>Lösg.:</u>



<u>Wir zeigen (2):</u>

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\left(e^{jmx} - e^{-jmx}\right)}{2j} \cdot \frac{\left(e^{jnx} - e^{-jnx}\right)}{2j}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(e^{j(m+n)x} - e^{j(m-n)x} - e^{j(n-m)x} + e^{-j(m+n)x}\right)dx \quad (*)$$

$$\overset{m=n}{=} -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(e^{2jmx} - 2 + e^{-2jmx}\right)dx$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2jmx}\,dx = \frac{e^{2jmx}}{2jm}\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2jm2\pi} - 1}{2jm} = 0$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(-2)\,dx = \underline{\pi \quad \text{für } m=n.}$$

Benutzen:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) \quad (i)$$

$$e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi) \quad (ii)$$

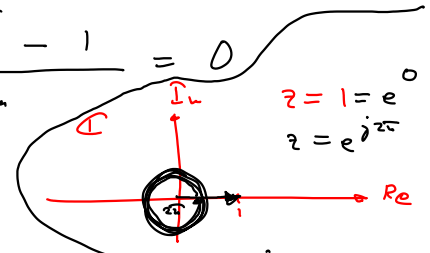
$$= \cos(\varphi) - j\sin(\varphi)$$

$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$

$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

$$\ominus \longrightarrow \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} = \sin(\varphi)$$

$$\frac{(i)-(ii)}{1} : \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} = \cancel{2j}\sin(\varphi)\Big/\cancel{2j}$$



$$e^{2j31\cdot 2\pi} = e^{j\cdot 62\cdot 2\pi}$$

$$e^{2jm2\pi} = \left(\underbrace{e^{j2\pi}}_{=1}\right)^{2m} = 1^{2m} = 1$$

Für $m \neq n$: Alle Integrale in $(*)$ sind von der Form:

$$\int_0^{2\pi} e^{jkx}\,dx \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

$$= \frac{e^{jkx}}{jk}\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{jk2\pi} - 1}{jk} = 0$$

I.e. für $m \neq n$: $\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = 0$

$\longrightarrow \square$ (2).

<u>Bestimmen der Koeff.:</u>

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

<u>Ges:</u> $a_0, a_1, a_2, \ldots$
$b_1, b_2, \ldots$

a_0:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)\right)dx$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,dx}_{=0} + b_n\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(nx)\,dx}_{=0}\right)$$

$$= a_0\pi \quad \longrightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx}$$

a_m:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)\right)\cos(mx)\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(mx)\,dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx + b_n\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx}_{=0}\right)$$

(wegen (3))

$$= a_m\pi \quad \longrightarrow \quad \boxed{a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx}$$

n n

Analog:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)\,dx = \ldots = b_m\pi \quad \longrightarrow \quad \boxed{b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)\,dx}$$

I.e.:

Die Fourierkoeff. $a_0, a_1, a_2, \ldots$
$b_1, b_2, \ldots$

in der Fourierreihe: $f(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{Mittelwert von } f(x)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$

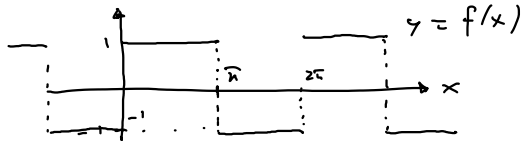
sind gegeben durch:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Bsp.:



$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\cdot\cos(nx)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\cdot\cos(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\sin(n\pi) - \sin(0) - \sin(n2\pi) + \sin(n\pi)\right) = \boxed{0}$$

$$\boxed{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi}\sin(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(-\cos(n\pi) + \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \underbrace{\cos(n2\pi)}_{=1} - \cos(n\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(2 - 2\cos(n\pi)\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = \boxed{\begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ ung.}\end{cases}}$$

$$\longrightarrow \quad \underline{f(x)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

$$= \underline{\frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right)}$$

(siehe Bsp. Einleitung).