Mathematik 2

Allgemeines:

- Begrüssung
- Website
- Inhalt:
  - Fourier → Reihe
    → Trafo
  - Wahrsch. / Statistik
- Kein Unterricht an diesem Freitag.

Einführung

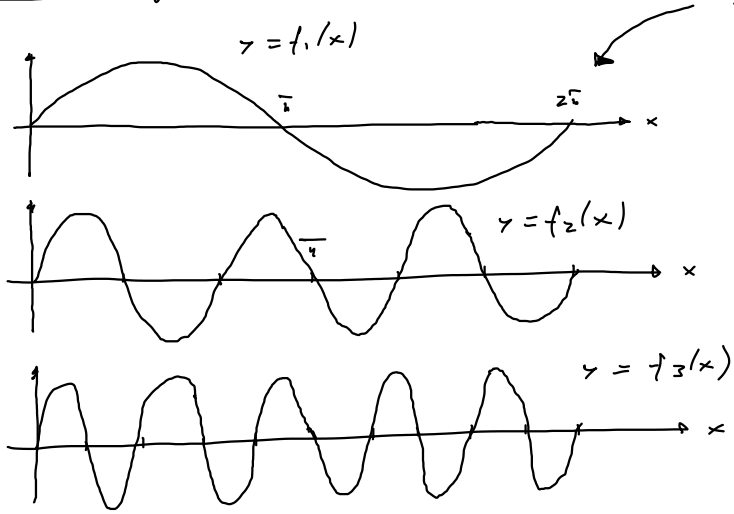
Betrachten Fkt.:

$f_1(x) = \sin(x)$

$f_2(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$

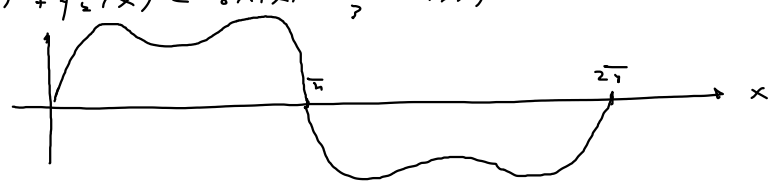
$f_3(x) = \frac{1}{5}\sin(5x)$

$\vdots$

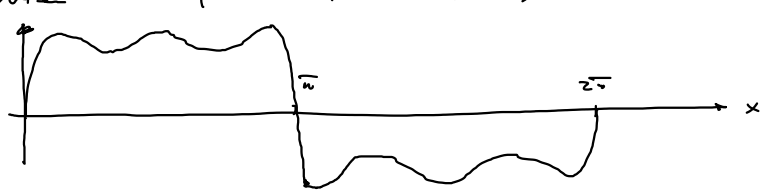


Betrachten nun:

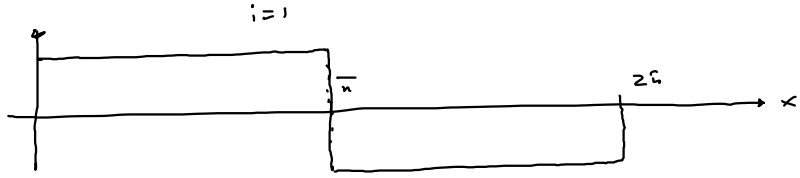
$f_1(x) + f_2(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$



Betrachten nun: $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = \dots$



Betrachten nun: $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$, so ergibt sich das folgende Bild:



Beobachtung: Eine unendliche Summe (eine Reihe) sinusförmiger Fkt. ergibt eine period. Fkt., welche nicht sinusförmig ist.

Umgekehrte Frage: Kann periodische Fkt. (nicht zwingend sinusförmig) als eine unendliche Summe aus sinusförmigen Fkt. geschrieben werden?

→ Antwort darauf: Theorie der <u>Fourier-Reihe</u>.

Fourier Reihe: Methode um beliebige periodische Fkt. als Summe von sin- & cos-Fkt. auszudrücken

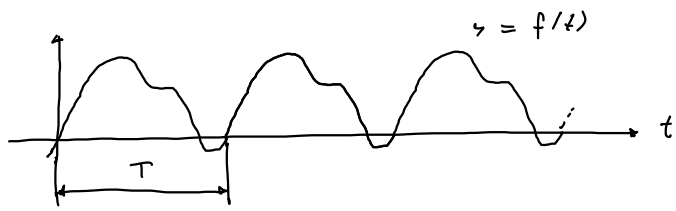
Bem: Dies ist alternative <u>Sichtweise</u>:

Zeitbild:	Frequenzbild:
$f(t)$	Frequenzen & Amplituden

Periodische Funktionen

Def: Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst <u>periodisch mit Periode T</u>, falls ein $T > 0$ ex., so dass:

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$



Def: $\nu = \frac{1}{T}$ heisst <u>Frequenz</u> (Einheit: $\frac{1}{s}$ = Hertz)

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ heisst <u>Kreisfrequenz</u>

Bsp.: $f(t) = A \sin(3t) \longrightarrow \omega = 3$, $T = \frac{2\pi}{3}$

Ist T eine Periode der Fkt. $f(t)$, dann folgt:

$$f(t + \underset{n \in \mathbb{N}}{n}T) = f(t + (n-1)T + T)$$
$$= f(t + (n-1)T)$$
$$= f(t + (n-2)T) = \dots = f(t)$$

→ alle ganzzahligen Vielfachen von T sind auch Perioden von $f(t)$

Die kleinste positive Periode T heisst <u>Grundperiode</u> der Fkt. $f(t)$.

Aufgabe: Ges: Grundperiode der folgenden Fkt.:

(i) $\sin(\omega t)$

(ii) $f(t) = \cos\left(\frac{2}{3}t\right) + \sin\left(\frac{2}{5}t\right)$

(iii) $f(t) = C$ (konstant)

(iv) $f(t) = \sin(2t) + \sin(2\pi t)$

<u>Lösg.</u> (i) $T = \frac{2\pi}{w}$

(ii) $f(t) = \cos(\frac{2}{3}t) + \sin(\frac{2}{5}t)$

$\rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = \underline{3\pi}$ $\qquad \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{2}{5}} = \underline{5\pi}$

$\longrightarrow$ T = kleinstes gemeinsames Vielfaches von T_1 & T_2 :

$\longrightarrow \underline{T = 15\pi}$

(iii) $f(t) = C$ ist periodisch.

Als Periode T kann jedes $T > 0$ gewählt werden.

I.e. $f(t) = C$ hat keine Grundperiode.

(iv) $f(t) = \sin(2t) + \sin(2\pi t)$

$\sin(2t)$ hat Grundper. $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\sin(2\pi t)$ —— " —— $T_2 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

T_1 & T_2 haben kein ganzzahliges gemeinsames Vielfaches!

(denn sonst: $m \cdot T_1 = n \cdot T_2$

$\longrightarrow m \cdot \pi = n \longrightarrow \pi = \frac{n}{m}$ ↯)

$\longrightarrow f(t) = \sin(2t) + \sin(2\pi t)$ ist nicht periodisch!