

MATHEMATIK 2
FOURIERMETHODEN
VERSION 17. Mai 2021

LISIBACH ANDRÉ

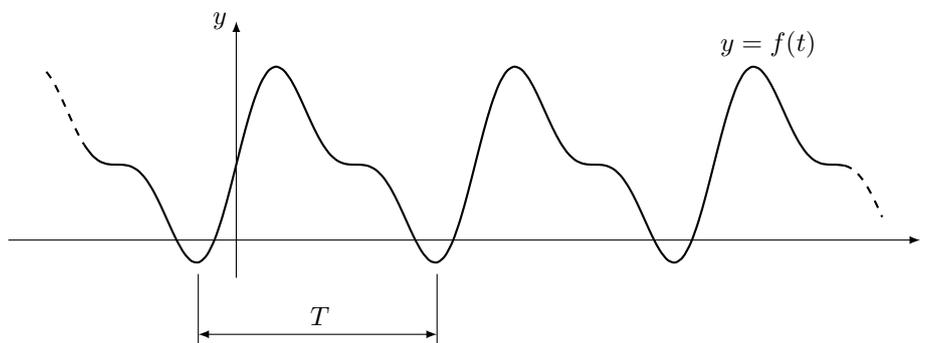
1. FOURIERREIHEN

In Ingenieur Anwendungen treten oft periodische Funktionen auf. Ihre Darstellung durch einfache periodische Funktionen, wie der Sinus- und Kosinusfunktion, ist von grosser praktischer Bedeutung. Diese Darstellung führt auf die Fourierreihe.

1.1. Periodische Funktionen. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *periodisch* mit *Periode* T , falls ein $T > 0$ existiert, so dass

$$f(t + T) = f(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Der Graph einer periodischen Funktion entspricht einer periodischen repetition des Graphen in jedem Intervall der Länge T :



Im folgenden werden wir, falls nicht anders vermerkt, mit t die Zeit bezeichnen. Die *Frequenz* ν und die *Winkelfrequenz* ω sind gegeben durch

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Beide Grössen besitzen die Einheit $\frac{1}{s} = \text{Hz}$. Beispielsweise besitzt die Funktion

$$u(t) = A \sin(3t)$$

die Kreisfrequenz $\omega = 3$ und Periode $T = \frac{2\pi}{3}$.

Aus $f(t+T) = f(t)$ folgt: Ist T eine Periode der Funktion $f(t)$, so ist jedes ganzzahlige Vielfache von T auch eine Periode von $f(t)$, i.e.

$$f(t + nT) = f(t).$$

Die kleinste Periode T einer Funktion $f(t)$ heisst *Grundperiode* der Funktion $f(t)$.

1.2. Trigonometrische Reihe. Die Funktionen

$$\sin(\omega t), \quad \cos(\omega t),$$

besitzen eine Grundperiode von $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Diese Grundperiode T ist auch eine Periode der Funktionen

$$\begin{array}{cccc} \sin(2\omega t), & \sin(3\omega t), & \sin(4\omega t), & \dots \\ \cos(2\omega t), & \cos(3\omega t), & \cos(4\omega t), & \dots \end{array}$$

Somit besitzt auch jede Linearkombination dieser Funktionen wie zum Beispiel

$$g(t) = \sin(\omega t) + \frac{7}{2} \cos(3\omega t) - 5 \sin(17\omega t)$$

die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Wir erweitern diese Betrachtung nun auf einen Ausdruck mit beliebig vielen Termen. Eine *trigonometrische Reihe* ist ein Ausdruck der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

Hierbei sind

$$\begin{array}{cccc} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \dots \\ & b_1, & b_2, & b_3, & \dots \end{array}$$

die *Koeffizienten* und t die *Variable* der trigonometrischen Reihe. Falls die obige unendliche Summe (Reihe) konvergiert, so besitzt die Grenzfunktion auch die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

In einem nächsten Schritt schränken wir uns auf periodische Funktionen mit Periode $T = 2\pi$ (i.e. $\omega = 1$) ein und nehmen an dass sich eine periodische Funktion $f(x)$ als trigonometrische Reihe schreiben lässt, i.e.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

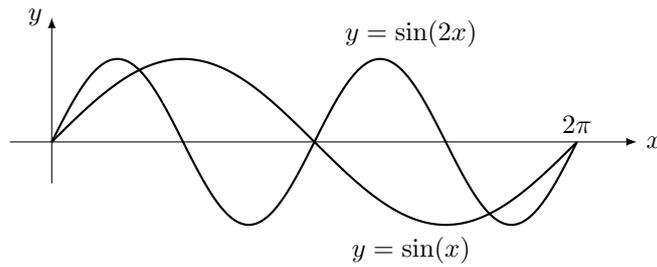
Im folgenden suchen wir Ausdrücke für die Koeffizienten dieser Reihe, Dazu benötigen wir die trigonometrischen *Orthogonalitätsrelationen*.

1.3. Orthogonalitätsrelationen.

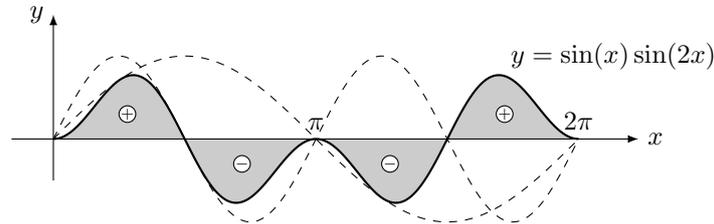
Theorem 1.1 (Orthogonalitätsrelationen). *Sei $m, n \in \mathbb{N}$. Wir haben*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \pi & m = n, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \pi & m = n, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx &= 0. \end{aligned}$$

Bevor wir einen rigorosen Beweis geben, illustrieren wir die zweite Gleichung davon für $m = 1$, $n = 2$ grafisch. Dazu betrachten wir die Graphen $y = \sin(x)$, $y = \sin(2x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$:



Im Intervall $[0, \pi/2]$ sind beide Funktionen positiv, i.e. ihr Produkt ist positiv und es ergibt sich in diesem Intervall ein positiver Beitrag für das Integral. Im Intervall $[\pi/2, \pi]$ ist $y = \sin(x)$ positiv und $y = \sin(2x)$ negativ, i.e. das Produkt ist negativ und es ergibt sich ein negativer Anteil für das Integral. Aus Symmetriegründen der beiden Funktionen bezüglich $x = \pi/2$ sind die beiden Anteile vom Betrag her genau gleich gross und heben sich somit auf. Dieser Effekt wiederholt sich im Intervall $[\pi, 2\pi]$. In der folgenden Grafik sind die entsprechenden Anteile grau eingefärbt:



Durch diese Aufhebungen ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) \sin(2x) dx = 0.$$

Den rigorosen Beweis führen wir für die zweite Orthogonalitätsrelation. Wir schreiben die Sinusfunktionen mit Hilfe von¹

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{jmx} - e^{-jmx}}{2j} \cdot \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j} dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(e^{j(m+n)x} - e^{j(m-n)x} - e^{j(n-m)x} + e^{-j(m+n)x} \right) dx. \end{aligned}$$

Ab hier unterscheiden wir die beiden Fälle $m = n$ und $m \neq n$.

Im Fall $m = n$ haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (e^{j2mx} - 2 + e^{-j2mx}) dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (-2) dx = \pi, \end{aligned}$$

¹Aus der Euleridentität

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi).$$

folgt

$$\begin{aligned} e^{-j\varphi} &= \cos(-\varphi) + j \sin(-\varphi), \\ &= \cos(\varphi) - j \sin(\varphi), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile verwendet haben dass $\cos(x)$ eine gerade und $\sin(x)$ eine ungerade Funktion ist. Die im Text verwendete Gleichung für den Sinus ergibt sich aus der Differenz $e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}$.

wobei wir verwendet haben dass

$$\int_0^{2\pi} e^{j2kx} dx = \frac{e^{j2kx}}{j2k} \Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{j4k\pi} - 1}{j2k} = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Im Fall $m \neq n$ haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(e^{j(m+n)x} - e^{j(m-n)x} - e^{j(n-m)x} + e^{-j(m+n)x} \right) dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

da alle auftretenden Integrale von der Form (1) sind. Der Beweis der anderen beiden Orthogonalitätsrelationen verläuft analog.

1.4. Fourierkoeffizienten. Sei $f(x)$ eine 2π -periodische Funktion. Im folgenden nehmen wir an, dass wir $f(x)$ als trigonometrische Reihe schreiben können, i.e. wir nehmen an dass

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \quad (2)$$

gilt und bestimmen die Koeffizienten

$$\begin{array}{ccccccc} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & \dots \\ & b_1, & b_2, & b_3, & \dots \end{array}$$

1.4.1. *Bestimmung von a_0 .* Wir integrieren (2) von 0 bis 2π :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx \right) \\ &= a_0 \pi, \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile die Linearität des Integrals verwendet haben² und für die dritte Zeile haben wir verwendet dass alle Terme in der Summe verschwinden, weil

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx = \frac{-\cos(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Somit folgt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

²Für zwei Summanden:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

Für beliebige Summe:

$$\int \sum_i f_i(x) dx = \sum_i \int f_i(x) dx.$$

1.4.2. *Bestimmung von a_n .* Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir multiplizieren (2) mit $\cos(mx)$ und integrieren von 0 bis 2π :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} \cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) \cos(mx) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_n \sin(nx) \cos(mx) \right) \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(mx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx \right). \end{aligned}$$

Der erste Term dieses Ausdrucks ist

$$\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(mx) dx = \frac{a_0}{2} \frac{\sin(mx)}{m} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Alle Terme in der Summe welche Sinusfunktionen beinhalten verschwinden wegen der dritten Orthogonalitätsrelation, i.e. es gilt

$$b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0.$$

Aus der ersten Orthogonalitätsrelation folgt: Die Terme in der Summe welche nur Kosinusfunktionen beinhalten verschwinden, mit Ausnahme des Terms mit dem Koeffizienten a_m :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = a_m \pi.$$

Es gilt somit

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_m \pi$$

und wir haben die folgende Gleichung für den Koeffizienten a_m :

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx.$$

1.4.3. *Bestimmung von b_n .* Die Rechnungen sind analog zur Bestimmung des Koeffizienten a_n , jedoch wird (2) mit $\sin(mx)$ multipliziert und die zweite und dritte Orthogonalitätsrelation verwendet. Man erhält

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx) dx.$$

1.5. **Fourierreihe für 2π -periodische Funktionen.** Wir schreiben die obigen Betrachtungen und Folgerungen als:

Theorem 1.2. Sei $f(x)$ eine 2π -periodische Funktion, welche sich schreiben lässt als

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right).$$

Dann sind die Koeffizienten in dieser Gleichung gegeben durch

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Der obige Ausdruck für $f(x)$ heisst *Fourierreihe* der Funktion $f(x)$, die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ heissen *Fourierkoeffizienten*.

Bemerkungen:

- (i) Für Bedingungen an die Funktion $f(x)$, welche die Schreibweise der Funktion $f(x)$ als trigonometrische Reihe erlauben siehe später.
- (ii) Die Integrale über das Intervall $[0, 2\pi]$ können ersetzt werden durch Integrale über ein beliebiges Intervall der Länge 2π , e.g.

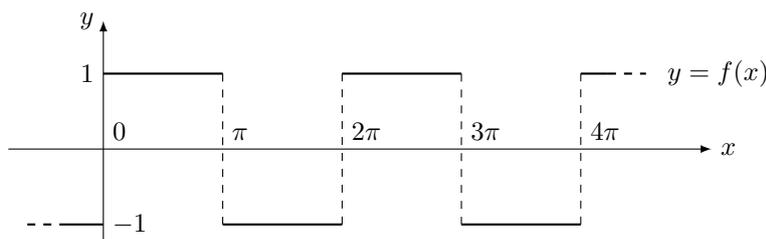
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Dies folgt aus der Periodizität der Integranden.

- (iii) Der Koeffizient a_0 ist gleich dem doppelten Mittelwert der Funktion $f(x)$. Somit ist der erste Term in der Fourierreihe, i.e. $\frac{a_0}{2}$, der Mittelwert der Funktion.

1.6. Beispiel: Rechteckfunktion. Sei $f(x)$ die 2π -periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi, \\ -1, & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$



Wir bestimmen die Koeffizienten unter Verwendung der obigen Gleichungen:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(\sin(n\pi) - \sin(0) - \sin(n2\pi) + \sin(\pi) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \cdot \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{-\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{-\cos(nx)}{n} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(-\cos(n\pi) + \cos(0) + \cos(n2\pi) - \cos(n\pi) \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade,} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

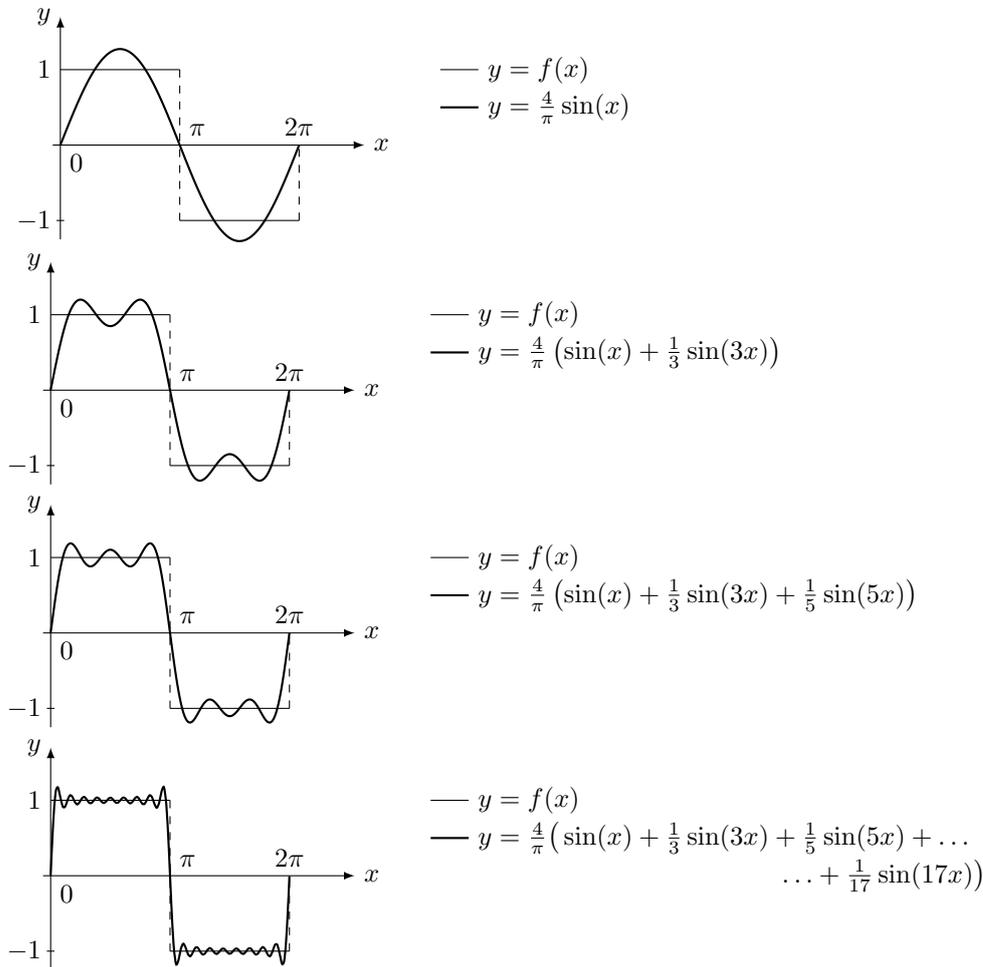
Somit kommen in der trigonometrischen Reihe nur die Summanden mit Koeffizienten $b_n = \frac{4}{n\pi}$ mit ungeradem n vor, i.e. die Fourierreihe ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right). \end{aligned}$$

Dies lässt sich schreiben als

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x).$$

Für die folgende grafische Darstellung brechen wir die Reihe nach dem ersten, dem zweiten, dem dritten und dem achten Term ab. Solche Ausdrücke, in welchen nur eine endliche Anzahl Terme der Fourierreihe verwendet werden heissen *Partialsommen*. Die Partialsommen dienen als Approximation von $f(x)$.



1.7. Erste Eigenschaften der Fourierreihe. Im folgenden benutzen wir die Notation

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_0, a_n, b_n$$

um die Zuordnung der Fourierkoeffizienten a_0, a_n, b_n zu einer Funktion $f(x)$ darzustellen. Zur Illustration verwenden wir als Basis die Rechteckfunktion, welche wir hier mit $q(x)$ bezeichnen, und ihre Fourierreihe:

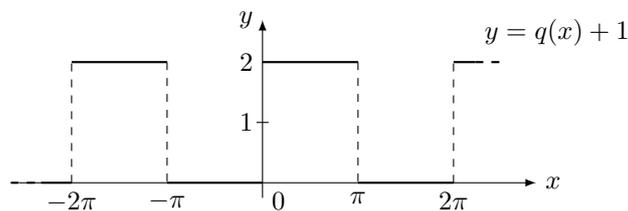
$$q(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi, \\ -1, & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

1.7.1. *Vertikale Verschiebung.* Wird zur Funktion $f(x)$ eine Konstante C dazu addiert dann ändert sich nur der Fourierkoeffizient a_0 :

$$f(x) + C \xrightarrow{\mathcal{F}} a_0 + 2C, a_n, b_n$$

Wir illustrieren diese Eigenschaft am Beispiel $f(x) = q(x) + 1$:



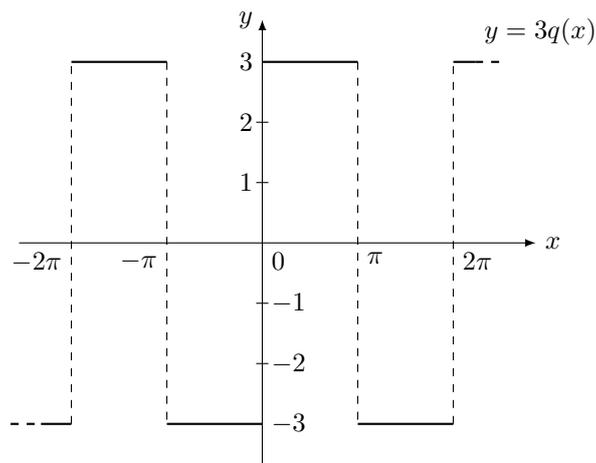
Die dazugehörige Fourierreihe ist

$$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{unger.}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

1.7.2. *Homogenität.* Wird die Funktion $f(x)$ mit einer Konstanten C multipliziert, dann ändern sich die Fourierkoeffizienten wie folgt:

$$Cf(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} Ca_0, Ca_n, Cb_n$$

Wir illustrieren diese Eigenschaft am Beispiel $f(x) = 3q(x)$:



Die dazugehörige Fourierreihe ist

$$f(x) = \frac{12}{\pi} \sum_{n=\text{unger.}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

1.7.3. *Additivität.* Sei $g(x)$ eine 2π -periodische Funktion mit Fourierkoeffizienten a_0^* , a_n^* , b_n^* , i.e.

$$g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_0^*, a_n^*, b_n^*$$

Wir betrachten die Funktion $f(x) + g(x)$. Seien \tilde{a}_0 , \tilde{a}_n , \tilde{b}_n die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) + g(x)$. Für \tilde{a}_n gilt nun beispielsweise

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) + g(x)) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x)) \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (g(x)) \cos(nx) dx \\ &= a_n + a_n^*. \end{aligned}$$

Analoge Gleichungen gelten für die Koeffizienten a_0^* , b_n^* . I.e. wir haben

$$f(x) + g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_0 + a_0^*, a_n + a_n^*, b_n + b_n^* .$$

Bemerkungen:

- (i) Die Eigenschaften Homogenität und Additivität zeigen dass es sich bei der Bildung der Fourierkoeffizienten um einen linearen Prozess handelt.
- (ii) Die Eigenschaft der vertikalen Verschiebung ist der Spezialfall der Additivität mit $g(x) = C$. In diesem Fall besitzt $g(x)$ die Fourierreihe $g(x) = C$, i.e. $a_0^* = 2C$.

1.8. **Fourierreihe für T -periodische Funktionen.** Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion. Wir definieren $x = \omega t$, wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Es folgt dass die Funktion

$$g(x) = f\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

eine 2π -periodische Funktion ist. Somit haben wir

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(nx) dx.$$

Diese Koeffizienten lassen sich nun in Form von Integralen der Funktion $f(t)$ ausdrücken. Beispielsweise:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{x}{\omega}\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

wobei wir in der letzten Gleichung die Substitution $x = \omega t$ verwendet haben. Analoge Gleichungen gelten für die Koeffizienten a_n , b_n . Die gleiche Substitution überführt die obige Reihe für $g(x)$ in

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right).$$

Wir halten diese Erkenntnisse fest:

Theorem 1.3 (Fourierreihe von T -periodischen Funktionen). Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion, welche sich schreiben lässt als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right),$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann sind die Koeffizienten in dieser Gleichung gegeben durch

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Bemerkungen:

- (i) Für Bedingungen an die Funktion $f(t)$, welche die Schreibweise der Funktion $f(t)$ als trigonometrische Reihe erlauben siehe später.
- (ii) Die Integrale über das Intervall $[0, T]$ können ersetzt werden durch Integrale über ein beliebiges Intervall der Länge T , e.g.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt.$$

Dies folgt aus der Periodizität der Integranden.

- (iii) Im folgenden werden wir als Variable stets t verwenden. Oft spielt t die Rolle der Zeit, dies muss aber nicht immer der Fall sein. Die Einheiten werden weggelassen.

1.9. Parität. Eine Funktion $f(x)$ heisst *gerade Funktion*, falls

$$f(-x) = f(x).$$

Ein typisches Beispiel einer geraden Funktion ist $f(x) = \cos(x)$. Eine Funktion $f(x)$ heisst *ungerade Funktion*, falls

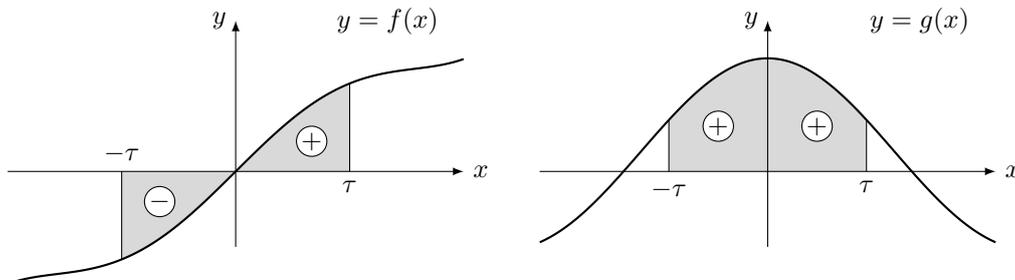
$$f(-x) = -f(x).$$

Ein typisches Beispiel einer ungeraden Funktion ist $f(x) = \sin(x)$.

Sei im folgenden $\tau > 0$ eine Konstante. Integrale von geraden und ungeraden Funktionen über dem Intervall $[-\tau, \tau]$ lassen sich folgendermassen vereinfachen: Sei $f(x)$ eine ungerade und $g(x)$ eine gerade Funktion. Es gilt

$$\int_{-\tau}^{\tau} f(x) dx = 0, \quad \int_{-\tau}^{\tau} g(x) dx = 2 \int_0^{\tau} g(x) dx.$$

Diese Eigenschaften lassen sich durch die Flächeninterpretation des Integrals erklären:



Für die Fourierreihen von geraden und ungeraden Funktionen ergeben sich nun die folgenden Konsequenzen:

(i) Sei $f(t)$ eine gerade Funktion mit Periode T . Dann folgt

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t) \cos(n\omega t)}_{\text{gerade}} dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t) \sin(n\omega t)}_{\text{ungerade}} dt = 0$$

und die Fourierreihe ist

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t).$$

(ii) Sei $f(t)$ eine ungerade mit Periode T . Dann folgt

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t) \cos(n\omega t)}_{\text{ungerade}} dt = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t) \sin(n\omega t)}_{\text{gerade}} dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega t) dt$$

und die Fourierreihe ist

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t).$$

Wir halten diese Erkenntnisse fest:

Theorem 1.4 (Fourierreihe von geraden und ungeraden Funktionen). *Die Fourierreihe einer geraden Funktion $f(t)$ mit Periode T ist eine Fourier-Kosinusreihe*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t),$$

wobei

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \cos(n\omega t) f(t) dt.$$

Die Fourierreihe einer ungeraden Funktion $f(t)$ mit Periode T ist eine Fourier-Sinusreihe

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t),$$

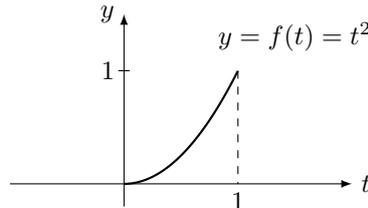
wobei

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega t) f(t) dt.$$

1.10. Periodische Erweiterungen. Oft ist eine Funktion nur auf einem Intervall gegeben und trotzdem soll eine Darstellung dieser Funktion als Fourierreihe gefunden werden. Dies wird durch eine periodische Fortsetzung der gegebenen Funktion auf ganz \mathbb{R} erreicht. Für die Fortsetzung gibt es mehrere Möglichkeiten von welchen wir drei besprechen.

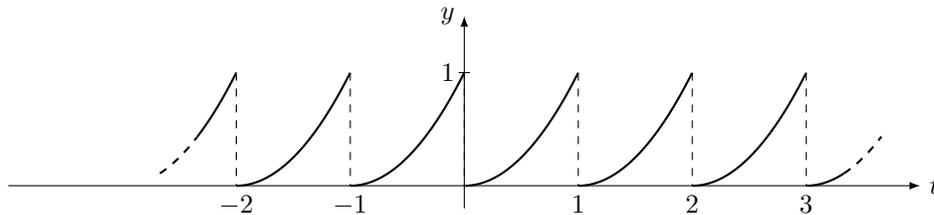
Sei $f(t)$ eine gegebene Funktion, definiert für $t \in [0, \tau)$. Zur Illustration (i.e. für das Zeichnen der Graphen) verwenden wir im folgenden die Funktion

$$f(t) = t^2, \quad \text{für } 0 \leq t < \tau = 1.$$



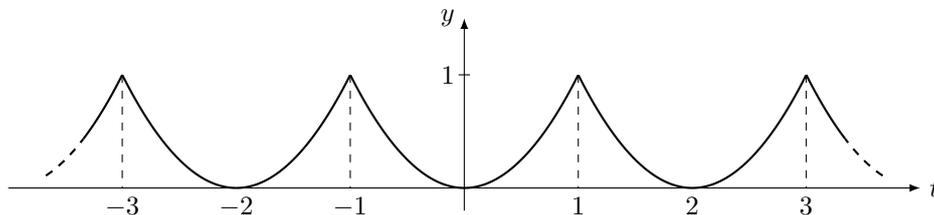
Wir erweitern die gegebene Funktion nun zu einer periodischen Funktion, welche auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Wir betrachten drei Möglichkeiten:

- (i) *Periodische Erweiterung.* Dazu wird die Funktion unter Verwendung der Periode $T = \tau = 1$ periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt. Es ergibt sich:



Die Fourierkoeffizienten dieser Erweiterung berechnen sich mit den üblichen Formeln.

- (ii) *Gerade Erweiterung.* Dazu wird die Funktion zuerst auf das Intervall $[-\tau, \tau]$ gerade erweitert und dann als 2τ -periodische Funktion periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt. Es ergibt sich:

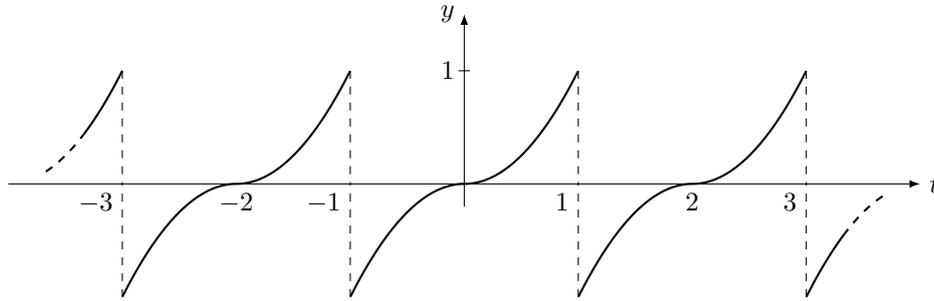


Die dazugehörige Fourierreihe ist eine Fourier-Kosinusreihe. Die Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = 0,$$

wobei $\omega = \pi/\tau$.

- (iii) *Ungerade Erweiterung.* Dazu wird die Funktion zuerst auf das Intervall $[-\tau, \tau]$ ungerade erweitert und dann als 2τ -periodische Funktion periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt. Es ergibt sich



Die dazugehörige Fourierreihe ist eine Fourier-Sinusreihe. Die Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin(n\omega t) dt,$$

wobei $\omega = \pi/\tau$.

1.11. Komplexe Darstellung der Fourierreihe. Unter Verwendung von

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j},$$

schreiben wir die Fourierreihe als

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega t} \right). \end{aligned}$$

Wir definieren

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Diese Größen heißen *komplexe Fourier Koeffizienten*. Unter Verwendung dieser wird die obige Fourierreihe zu

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der zweiten Zeile heißt *komplexe Fourierreihe*.

Aus den Formeln für die Fourierkoeffizienten a_0 , a_n , b_n leiten wir die folgenden Ausdrücke für die komplexen Fourierkoeffizienten her:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{j0\omega t} dt, \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt - \frac{j}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \underbrace{\left(\cos(n\omega t) - j \sin(n\omega t) \right)}_{=\cos(-n\omega t) + j \sin(-n\omega t)} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt, \\
c_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n + jb_n) \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left(\cos(n\omega t) + j \sin(n\omega t) \right) dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{jn\omega t} dt.
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke gelten für $n = 1, 2, 3, \dots$. Wir sehen dass die komplexen Fourierkoeffizienten alle durch den gleichen Ausdruck

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

gegeben sind.

Bemerkungen:

- (i) Es gilt $c_{-n} = \overline{c_n}$.
- (ii) Die reelle und die komplexe Darstellung der Fourierreihe sind gleichwertig. Ein Vorteil der reellen Darstellung ist die direktere Interpretation der Amplituden als physikalische Grösse. Ein Vorteil der komplexen Darstellung ist ihre kompakte Schreibweise.
- (iii) Die Umrechnung von der komplexen in die reelle Darstellung ist durch die Gleichungen

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = 2\operatorname{Re}(c_n), \quad b_n = -2\operatorname{Im}(c_n)$$

gegeben. Diese Gleichungen folgen aus den obigen Gleichungen für die komplexen Koeffizienten gegeben durch die reellen Koeffizienten.

1.12. Zeitverschiebung. Die komplexe Darstellung einer Fourierreihe erlaubt einen einfachen Zugang zur Fourierreihe von zeitverschobenen Funktionen.

Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion mit Fourierreihe³

$$f(t) = \sum_n c_n e^{jn\omega t}.$$

Wir betrachten die zeitverschobene Funktion

$$g(t) = f(t - a).$$

Seien \tilde{c}_n die Fourierkoeffizienten von $g(t)$, i.e. $g(t)$ besitzt die Fourierreihe

$$g(t) = \sum_n \tilde{c}_n e^{jn\omega t}.$$

³Werden bei einer Summe für den Laufindex n keine weiteren Angaben gemacht, so wird davon ausgegangen dass n die gesamten ganzen Zahlen durchläuft, i.e.

$$\sum_n s_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n.$$

Für die Koeffizienten \tilde{c}_n gilt

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_a^{T+a} f(t-a) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega(u+a)} du \\ &= e^{-jn\omega a} c_n.\end{aligned}$$

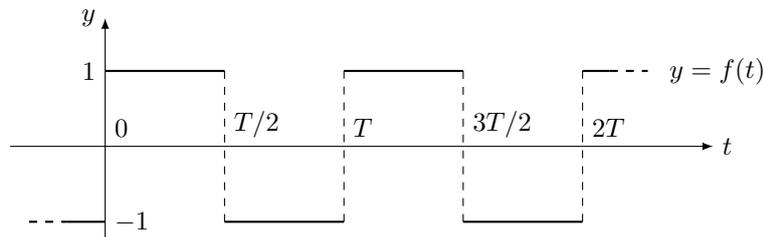
Hierbei haben wir für die zweite Zeile das Integrationsintervall auf $[a, a+T]$ verschoben und $f(t) = g(t-a)$ gesetzt. Für die dritte Zeile haben wir die Substitution $u = t-a$ verwendet. Wir sehen dass die Fourierkoeffizienten von $f(t)$ und $g(t) = f(t-a)$ um die Phase $e^{-jn\omega a}$ verschoben sind, die Beträge aber gleich bleiben. I.e.

$$\tilde{c}_n = e^{-jn\omega a} c_n, \quad |\tilde{c}_n| = |c_n|$$

1.13. Spektrum. Das Spektrum ist die grafische Darstellung der Fourierkoeffizienten a_0, a_n, b_n in Abhängigkeit der Vielfachen von ω . Wir illustrieren am Beispiel der Rechteckfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T/2, \\ -1, & T/2 \leq t < T. \end{cases}$$

Diese Funktion besitzt den Graphen:



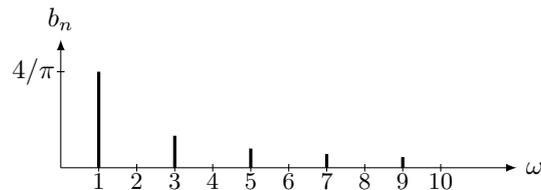
In der Signalverarbeitung wird die Darstellung $y = f(t)$ Darstellung im *Zeitbereich* genannt. Die dazugehörige Fourierreihe ist

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{1}{n} \sin(n\omega t),$$

i.e. die Fourierkoeffizienten sind

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4}{5\pi}, \quad \dots$$

Die Darstellung der Koeffizienten (auch genannt Amplituden) heisst *Amplitudenspektrum*:



Die ganzen Zahlen auf der horizontalen Achse entsprechen Vielfachen der Frequenz ω . In der Signalverarbeitung wird diese Darstellung Darstellung im *Frequenzbereich* genannt.

1.13.1. *Frequenzänderung, Einfluss auf Spektrum.* Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion. Und sei $\omega = 2\pi/T$ die dazugehörige Grundfrequenz. Wir betrachten die zeitlich skalierte Funktion

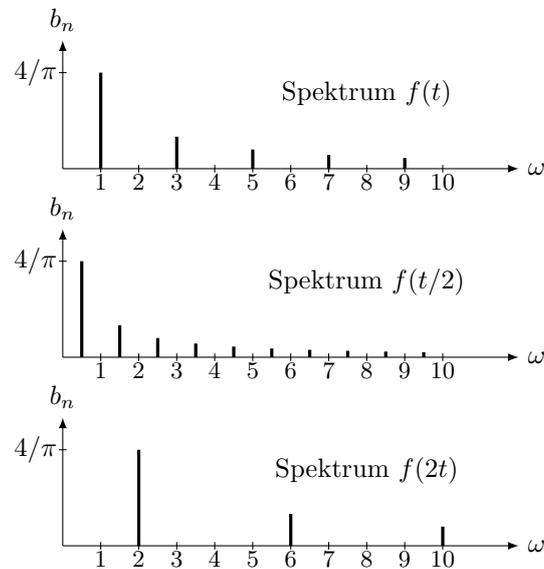
$$\tilde{f}(t) = f\left(\frac{t}{a}\right),$$

wobei a eine Konstante ist. Die Funktion $\tilde{f}(t)$ ist aT -periodisch und die Grundfrequenz ist $\tilde{\omega} = \omega/a$. Betrachten wir nun beispielsweise die Berechnung des Fourierkoeffizienten \tilde{a}_n , so sehen wir

$$\begin{aligned}\tilde{a}_n &= \frac{2}{\tilde{T}} \int_0^{\tilde{T}} \tilde{f}(t) \cos(n\tilde{\omega}t) dt \\ &= \frac{2}{aT} \int_0^{aT} f\left(\frac{t}{a}\right) \cos\left(\frac{n\omega t}{a}\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(u) \cos(n\omega u) du \\ &= a_n.\end{aligned}$$

Das heisst die Fourierkoeffizienten ändern sich der Grösse nach nicht, jedoch gehören die jeweiligen Koeffizienten zu den skalierten Frequenzen $n\tilde{\omega} = n\omega/a$. Das Spektrum wird somit horizontal um den Faktor $\frac{1}{a}$ gestreckt.

Wir betrachten als Beispiel die obige Rechteckfunktion $f(t)$ und die skalierten Funktion $f(t/2)$, $f(2t)$. Die Spektren sind



Man beachte dass wir in den drei Spektren auf der horizontalen Achse vielfache der Grundfrequenz ω der Funktion $f(t)$ aufgetragen haben.

1.13.2. *Spektrum, komplexe Form.* Wir illustrieren am Beispiel der Funktion 2π -periodischen Funktion

$$f(t) = t, \quad \text{für } t \in [-\pi, \pi).$$

Wir haben (siehe Übung 21)

$$f(t) = \sum_{n \neq 0} \frac{j}{n} (-1)^n e^{jn\omega t},$$

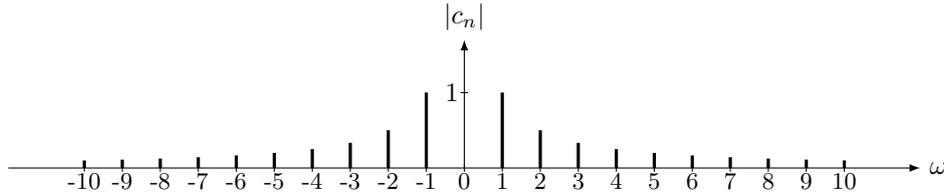
i.e.

$$c_0 = 0, \quad c_n = \frac{j}{n}(-1)^n.$$

Für die grafische Darstellung der Fourierkoeffizienten der komplexen Darstellung der Fourierreihe stellen wir den Betrag der Koeffizienten in Abhängigkeit der zugehörigen Vielfachen der Grundfrequenz ω dar, Dieser Betrag ist

$$|c_n| = \left| \frac{j}{n}(-1)^n \right| = \frac{1}{|n|}.$$

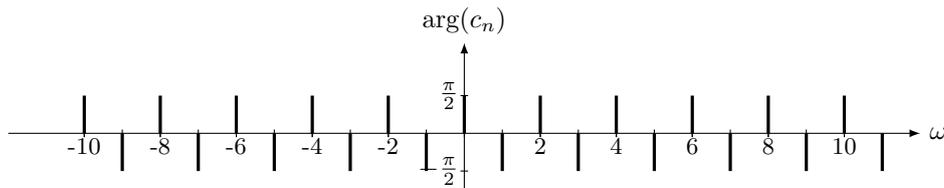
Wir erhalten das Spektrum:



Die Phasen der Fourierkoeffizienten sind

$$\arg(c_n) = \arg\left(\frac{j}{n}(-1)^n\right) = \arg\left(\frac{1}{n}e^{j(\pi/2+n\pi)}\right) = \begin{cases} -\pi/2, & n \text{ ungerade,} \\ +\pi/2, & n \text{ gerade,} \end{cases}$$

Das entsprechende Spektrum ist



1.14. Multiplikationssatz.

Theorem 1.5. Die Funktionen $f(t)$, $g(t)$ mit gemeinsamer Grundperiode $T = 2\pi/\omega$ besitzen die Fourierreihen

$$f(t) = \sum_m c_m e^{jm\omega t}, \quad g(t) = \sum_n d_n e^{jn\omega t}.$$

Es gilt

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt = \sum_m c_m \bar{d}_m.$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_m c_m e^{jm\omega t} \right) \left(\sum_n d_n e^{jn\omega t} \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\text{Terme der Form } c_m d_n e^{jm\omega t} e^{jn\omega t} \text{ mit } m = -n \right. \\ &\quad \left. + \text{Terme der Form } c_m d_n e^{jm\omega t} e^{jn\omega t} \text{ mit } m \neq -n \right) dt. \end{aligned}$$

Terme der Form $c_m d_n e^{jm\omega t} e^{jn\omega t}$ mit $m = -n$ ergeben den folgenden Anteil an das obige Integral:

$$\frac{1}{T} \int_0^T c_m d_n e^{j(m+n)\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T c_m d_n dt$$

$$= c_m d_n \frac{1}{T} \int_0^T dt = c_m d_n = c_m \bar{d}_n,$$

wobei wir verwendet haben dass $d_n = d_{-n} = \bar{d}_n$ (wegen $m = -n$). Die Summe dieser Terme liefert somit den folgenden Anteil an das obige Integral:

$$\sum_m c_m \bar{d}_m.$$

Terme der Form $c_m d_n e^{jm\omega t} e^{jn\omega t}$ mit $m \neq -n$ ergeben den folgenden Anteil an das obige Integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T c_m d_n e^{j(m+n)\omega t} dt &= \frac{c_m d_n}{T} \int_0^T e^{j(m+n)\omega t} dt \\ &= \frac{c_m d_n}{T} \left. \frac{e^{j(m+n)\omega t}}{j(m+n)\omega} \right|_0^T \\ &= \frac{c_m d_n}{T j(m+n)\omega} (e^{j(m+n)2\pi} - 1) = 0, \end{aligned}$$

i.e. der Anteil dieser Terme verschwindet.

Nun verwenden wir den Multiplikationssatz im Fall $f(t) = g(t)$. Wir haben

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \sum_n |c_n|^2.$$

Mit

$$\begin{aligned} |c_0|^2 &= \frac{a_0^2}{4}, & |c_n|^2 &= \operatorname{Re}(c_n)^2 + \operatorname{Im}(c_n)^2 = \frac{a_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4}, \\ |c_{-n}|^2 &= c_{-n} \overline{c_{-n}} = \bar{c}_n c_n = |c_n|^2 = \frac{a_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4} \end{aligned}$$

folgt der Satz von Parseval:

Theorem 1.6. *Parseval*

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \sum_n |c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_n (a_n^2 + b_n^2).$$

Als Anwendung des Satzes von Parseval betrachten wir eine Spannungssignal $f(t)$ an einem Widerstand $R = 1 \Omega$. Die momentane Leistung ist $P(t) = f(t)^2/R$. Die mittlere Leistung ist somit

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{f(t)^2}{R} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt.$$

Für $f(t)$ in der Form einer Sinusspannung gegeben durch $f(t) = b_n \sin(n\omega t)$ ergibt sich für die mittlere Leistung

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{2} b_n^2.$$

Werden nun die zwei Sinusspannungen

$$f_1(t) = b_{n_1} \sin(n_1 \omega t), \quad f_2(t) = b_{n_2} \sin(n_2 \omega t)$$

überlagert zu $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, so ergibt sich für die mittlere Leistung, nach Parseval,

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{2} b_{n_1}^2 + \frac{1}{2} b_{n_2}^2.$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die mittlere Leistung der Spannung $f_1(t)$, der zweite Term auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die mittlere Leistung der Spannung $f_2(t)$. Nach Parseval ist dieses Resultat für beliebige Überlagerungen von Sinus- und Kosinusspannungen (der gleichen Grundfrequenz) gültig. Wir haben somit die folgende physikalische Formulierung des Satzes von Parseval:

Theorem 1.7. *Parseval, physikalische Formulierung: Die mittlere Leistung einer periodischen Spannung $f(t)$ ist gleich der Summe der Leistungen aller harmonischen Teilschwingungen.*

(Mit harmonischen Teilschwingungen sind die einzelnen Schwingungen der Fourierzerlegung gemeint.)

1.15. Konvergenz der Fourierreihe.

1.15.1. *Approximation durch Partialsummen.* Für eine T -periodische Funktion $f(t)$ und für ein $k > 1$ betrachten wir die Partialsummen

$$f_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right),$$

wobei die Koeffizienten a_0, a_n, b_n die Fourierkoeffizienten sind, i.e.

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

Bei den Partialsummen handelt es sich somit um Fourierreihen, bestehend aus den ersten k Termen. Diese Partialsummen liefern eine Approximation für die Funktion $f(t)$ und je mehr Terme in einer Partialsumme berücksichtigt werden, desto besser ist die Approximation. Dieser Effekt wurde bereits auf Seite 7 für die Rechteckfunktion illustriert, indem Partialsummen mit einem Term, zwei, drei und neun Termen gezeichnet wurden.

1.15.2. *Verhalten an Sprungstelle.* Die Verbesserung der Approximation gilt jedoch nicht an einer Stelle an welcher die Funktion eine Sprungstelle aufweist. Wir illustrieren am Beispiel der Rechteckfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi, \\ -1, & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

und der Sprungstelle bei $t = \pi$. Vergleichen wir die Funktion $f(t)$ mit der Partialsumme $f_k(t)$ an dieser Stelle, so haben wir

$$f(\pi) = -1, \quad f_k(\pi) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ unger.}}}^k \frac{1}{n} \sin(n\pi) = 0.$$

Dies gilt für beliebiges k . Die Fourierreihe ist gegeben durch den Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$. Es folgt dass auch die Fourierreihe an dieser Stelle nicht mit dem Funktionswert übereinstimmt:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{1}{n} \sin(n\pi) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\pi) = 0 \neq f(\pi).$$

Genau genommen macht also die Schreibweise

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{1}{n} \sin(nt)$$

keinen Sinn, da die Funktion an einzelnen Stellen von ihrer Fourierreihe abweicht. Es handelt sich bei genügend vernünftigen Funktionen aber nur um einzelne isolierte Punkte (im Beispiel der Rechteckfunktion die Punkte $t = 0$ und $t = \pi$) und somit wird üblicherweise trotzdem diese Schreibweise verwendet.

Im Beispiel der Rechteckfunktion haben wir $f_k(\pi) = 0$, i.e. die Approximationen durch Partialsummen und somit auch die Fourierreihe nehmen den Funktionswert, gegeben aus dem Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwertes an. Dies gilt allgemein.

1.15.3. *Konvergenz.* Zur Konvergenz der Partialsummen zur gegebenen Funktion haben wir den folgenden Satz:

Theorem 1.8. *Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion, welche beschränkt ist und welche in einer Periode*

- (i) *eine endliche Anzahl von Maxima und Minima besitzt,*
- (ii) *eine endliche Anzahl von Sprungstellen besitzt.*

Dann konvergiert die Fourierreihe von $f(t)$ in jedem Punkt gegen $f(t)$, in welchem $f(t)$ stetig ist. An Sprungstellen von $f(t)$ konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert der Funktion $f(t)$.

Bemerkungen:

- (i) Wir geben keinen Beweis.
- (ii) Mit Konvergenz der Fourierreihe ist die Konvergenz der Partialsummen: $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$ gemeint.
- (iii) Die beiden Bedingungen (i), (ii) heissen *Dirichletbedingungen*. Bei den meisten Funktionen, gegeben durch reale Signale, sind diese Bedingungen erfüllt.

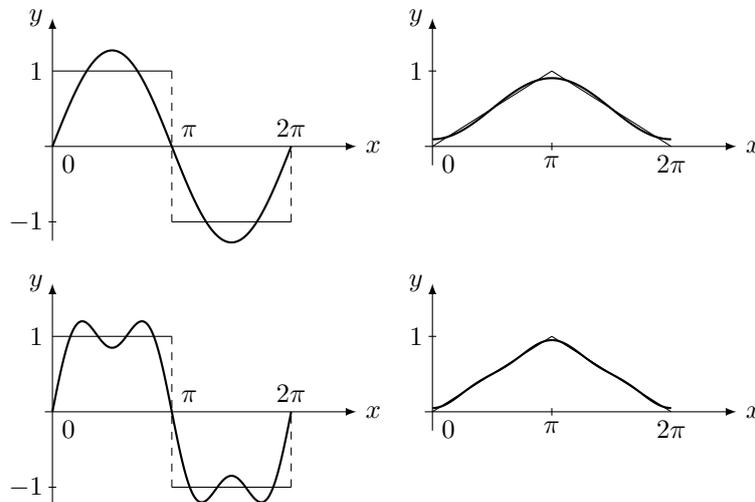
1.15.4. *Geschwindigkeit der Konvergenz.* Wir betrachten die Approximationen durch Partialsummen der folgenden 2π -periodischen Rechtecks- und Dreiecksfunktion:

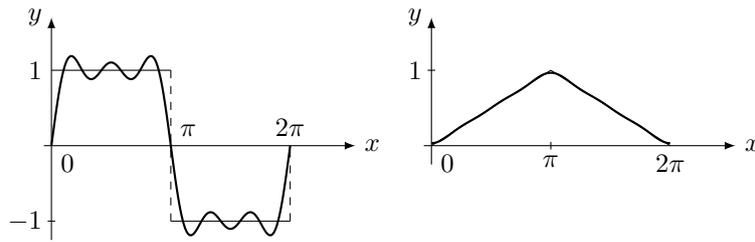
$$s(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi, \\ -1, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases} \quad t(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi}, & 0 \leq x < \pi, \\ 2 - \frac{x}{\pi}, & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

Die dazugehörigen Fourierreihen sind

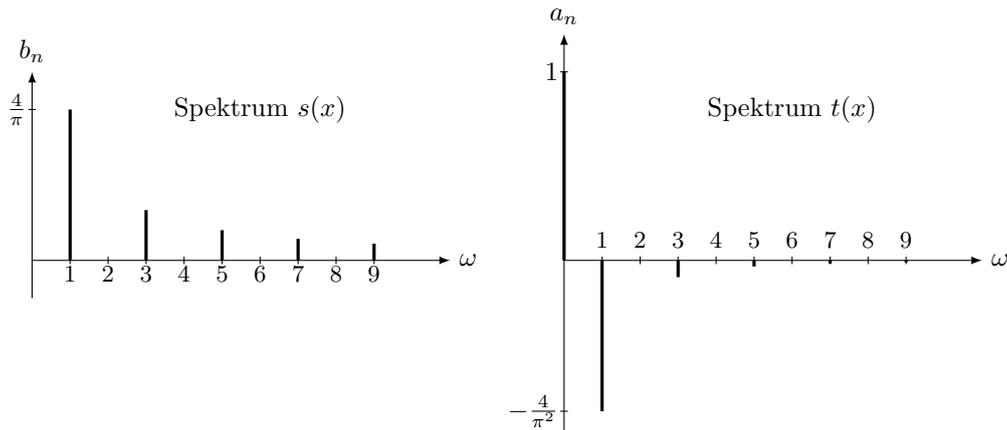
$$s(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{1}{n} \sin(nx), \quad t(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{1}{n^2} \cos(nx).$$

Wir zeichnen die Approximationen $s_k(x)$, $t_k(x)$ mit einem, zwei und drei Termen in der Summe der Fourierreihe:





Wir beobachten dass die Approximation durch gleich viele Terme bei der Dreiecksfunktion besser ist als bei der Rechtecksfunktion. Die dazugehörigen Spektren sind:



Hier haben wir die vertikale Achse unterschiedlich skaliert. Die Skalierung bewirkt dass der Koeffizient b_1 der Rechtecksfunktion und der Koeffiziente a_1 der Dreiecksfunktion vom Betrag her gleich sind. Die Skalierung auf der horizontalen Achse ist in den beiden Spektren identisch. Beobachtung: Wir sehen dass die Amplituden für wachsende Vielfache der Frequenzen beim Spektrum der Dreiecksfunktion schneller abfallen als bei der Rechtecksfunktion. Dies geht einher mit dem Ausdruck der Amplituden in den entsprechenden Fourierreihen:

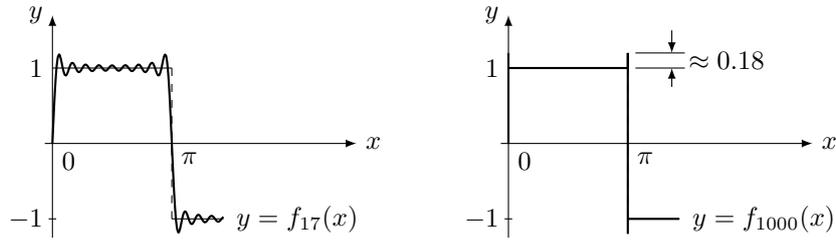
$$s(x) : \quad a_n = \frac{4}{\pi n} \sim \frac{1}{n},$$

$$t(x) : \quad b_n = -\frac{4}{\pi^2 n^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Der Grund dafür ist die unterschiedliche Regularität der betrachteten Funktionen. Die Rechtecksfunktion weist Sprungstellen auf, während die Dreiecksfunktion stetig ist. Allgemein gilt: Je regulärer die betrachtete Funktion, desto schneller die Konvergenz der Fourierreihe, desto besser die Approximation für eine gegebene Anzahl Terme in der Fourierreihe, desto schneller fallen die Amplituden für grössere Frequenzen ab.

1.15.5. *Gibbs Phänomen.* Bei der Approximation der Rechtecksfunktion durch die entsprechenden Partialsummen $f_k(x)$ (siehe Seite 7) beobachten wir bei der Sprungstelle bei $x = \pi$ ein *Überschwingen* auf der linken Seite dieser Sprungstelle und ein *Unterschwingen* auf der rechten Seite dieser Sprungstelle. Die Breite des Bereichs in welchem dieser Effekt auftritt wird desto kleiner, je mehr Terme in der Approximation verwendet werden, i.e. der Effekt konzentriert sich mehr und mehr in der Nähe der Sprungstelle. Für sehr grosse k verschwindet dieses Über- und Unterschwingen nicht. Das beobachtete Phänomen wird als *Gibbssches Phänomen* bezeichnet. Die Höhe der Überschwingung

beträgt etwa 9% der Höhe des Sprungs und tritt bei allen Sprungstellen auf.



1.16. Integral und Ableitung der Fourierreihe.

1.16.1. *Integral einer Fourierreihe.* Wir illustrieren an einem Beispiel und betrachten die 2π -periodische Funktion $f(t)$ mit $f(t) = t$ für $t \in [-\pi, \pi)$. Die Funktion $f(t)$ besitzt die Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} \sin(nt).$$

Insbesondere haben wir $a_0 = 0$. Unbestimmte Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} \sin(nt) \right) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} \int \sin(nt) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} \left(-\frac{\cos(nt)}{n} + C_n \right) \\ &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nt). \end{aligned}$$

Der erhaltene Ausdruck entspricht wieder einer Fourierreihe mit Periode $T = 2\pi$. Die Integrationskonstante C spielt die Rolle von $\frac{a_0}{2}$ dieser Fourierreihe. Die Integrationskonstante C kann fixiert werden, indem man eine spezifische Stammfunktion betrachtet. Als Beispiel betrachten wir die 2π -periodische Stammfunktion $F(t)$, gegeben durch

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2} \quad \text{für } t \in [-\pi, \pi).$$

Die Konstante C kann nun gefunden werden indem man für diese Stammfunktion die Konstante a_0 mit der Formel für diesen Fourierkoeffizienten berechnet:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3}.$$

Somit haben wir

$$C = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und die Stammfunktion $F(t)$ ist gegeben durch

$$F(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nt).$$

Man beachte dass die Funktion $f(t)$ keinen konstanten Anteil besitzt, i.e. der Koeffizient a_0 in der Fourierreihe von $f(t)$ ist gleich Null. Für den Fall einer Funktion mit nichtverschwindendem konstantem Anteil, wie zum Beispiel:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

folgt durch Integration (wir setzen die auftretende Integrationskonstante gleich Null)

$$\int f(t)dt = \frac{\pi^2}{3}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^3} \sin(nt).$$

Hierbei handelt es sich nicht mehr um eine periodische Funktion und somit ist die Entwicklung in eine Fourierreihe nicht möglich. In der Praxis ist der konstante Anteil eines Signals oft nicht von Bedeutung und wird zuerst weggefiltert, so dass dieser Effekt nicht auftreten kann.

Allgemein (jedoch für eine Funktion mit $a_0 = 0$) haben wir

$$\begin{aligned} \int f(t)dt &= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int \cos(n\omega t)dt + b_n \int \sin(n\omega t)dt \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n\omega} \sin(n\omega t) - \frac{b_n}{n\omega} \cos(n\omega t) \right) + C. \end{aligned}$$

Somit bewirkt die Integration einer Fourierreihe die folgende Transformation der Fourierkoeffizienten (siehe auch Seite 7 für die Bedeutung dieser schematischen Darstellung):

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & a_0 = 0, a_n, b_n \\ \downarrow f \dots dt & & \downarrow \\ F(t) = \int f(t)dt & \xrightarrow{\mathcal{F}} & C, -\frac{b_n}{n\omega}, \frac{a_n}{n\omega} \end{array}$$

In der obigen Herleitung haben wir von der ersten auf die zweite Zeile die Integration mit der unendlichen Summe vertauscht, i.e. wir haben gliedweise integriert. Diese Operation ist nur unter gewissen Voraussetzungen möglich. Wir haben den Satz:

Theorem 1.9. *Sei $f(t)$ eine periodische Funktion, welche die Dirichletbedingungen erfüllt. Dann darf die Fourierreihe von $f(t)$ gliedweise integriert werden.*

1.16.2. *Ableitung einer Fourierreihe.* Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion mit entsprechender Fourierreihe. Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{d}{dt} \cos(n\omega t) + b_n \frac{d}{dt} \sin(n\omega t) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n\omega a_n \sin(n\omega t) + n\omega b_n \cos(n\omega t) \right). \end{aligned}$$

Somit bewirkt die Ableitung einer Fourierreihe die folgende Transformation der Fourierkoeffizienten:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & a_0, a_n, b_n \\ \frac{d}{dt} \downarrow & & \downarrow \\ F(t) = \frac{df}{dt}(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 0, n\omega b_n, -n\omega a_n \end{array}$$

In der obigen Herleitung haben wir von der ersten auf die zweite Zeile die Ableitung mit der unendlichen Summe vertauscht, i.e. wir haben *gliedweise* abgeleitet. Diese Operation ist nur unter gewissen Voraussetzungen möglich. Wir haben den Satz:

Theorem 1.10. *Sei $f(t)$ eine periodische Funktion, so dass $f'(t)$ die Dirichletbedingungen erfüllt. Dann darf die Fourierreihe von $f(t)$ gliedweise abgeleitet werden.*

1.16.3. Bemerkungen zu Ableitung und Integral.

- (i) Die Ableitung führt zu einer Multiplikation der Fourierkoeffizienten a_n, b_n mit $\pm n\omega$. Die Hochfrequenzanteile des Signals $f(t)$ werden somit verstärkt (diese enthalten meistens das Rauschen), was oft unerwünscht ist. In diesem Sinne vermindert die Ableitung die Regularität eines Signals.
- (ii) Bei der Integration tritt der umgekehrte Effekt auf, i.e. die hochfrequenten Anteile des Signals werden abgeschwächt. Somit erhöht die Integration die Regularität eines Signals, was oft erwünscht ist.
- (iii) Analoge Berechnungen können für die komplexe Darstellung der Fourierreihe durchgeführt werden. Die Koeffizienten c_n werden bei der Ableitung mit dem Faktor $j n \omega$ und bei der Integration mit dem Faktor $\frac{1}{j n \omega}$ multipliziert.

1.16.4. *Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.* Wir illustrieren an einem Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt}(t) + x(t) = y(t),$$

wobei $y(t)$ eine 1-periodische Funktion mit $y(t) = t$ für $t \in [0, 1)$ ist. I.e. $y(t)$ ist die 1-periodische Sägezahnfunktion mit Amplitude gleich 1. Somit besitzt $y(t)$ die Fourierreihe

$$y(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n\pi} \sin(n2\pi t).$$

Gesucht ist nun eine partikuläre Lösung $x(t)$ der obigen Differentialgleichung mit der gegebenen Funktion $y(t)$. Die partikuläre Lösung ist die stationäre Lösung, i.e. diejenige Lösung welche sich für grosse t einstellt. Wir erwarten deshalb für $x(t)$ eine periodische Funktion mit der gleichen Grundfrequenz wie $y(t)$. Eine solche Funktion lässt sich in eine Fourierreihe entwickeln und somit machen wir den folgenden Ansatz für $x(t)$:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n2\pi t) + b_n \sin(n2\pi t) \right).$$

Um diesen Ansatz in der obigen Differentialgleichung verwenden zu können benötigen wir die Ableitung:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n2\pi a_n \sin(n2\pi t) + n2\pi b_n \cos(n2\pi t) \right).$$

Einsetzen von $x(t)$ und $\frac{dx}{dt}(t)$ in der obigen Gleichung ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-n2\pi a_n \sin(n2\pi t) + n2\pi b_n \cos(n2\pi t) \right) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n2\pi t) + b_n \sin(n2\pi t) \right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n\pi} \sin(n2\pi t).$$

Die linke Seite nach Kosinus- und Sinustermen geordnet ergibt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n2\pi b_n + a_n) \cos(n2\pi t) + (b_n - n2\pi a_n) \sin(n2\pi t) \right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n\pi} \sin(n2\pi t).$$

Koeffizientenvergleich ergibt das Gleichungssystem für a_0 , a_n , b_n :

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}, \\ n2\pi b_n + a_n = 0, \\ b_n - n2\pi a_n = -\frac{1}{n\pi}. \end{cases}$$

Die Lösung davon ist

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{2}{1 + 4\pi^2 n^2}, \quad b_n = -\frac{1}{\pi n + 4\pi^3 n^3}$$

und somit ist die Fourierreihe von $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1 + 4\pi^2 n^2} \cos(n2\pi t) - \frac{1}{\pi n + 4\pi^3 n^3} \sin(n2\pi t) \right).$$

Dies ist die gesuchte partikuläre Lösung.

Bemerkungen:

(i) Rechnung in komplexer Form:

Fourierreihe der gegebenen Funktion $y(t)$:

$$y(t) = \sum_n c_n e^{nj\omega t}.$$

Ansatz für $x(t)$ und die Ableitung davon:

$$x(t) = \sum_n d_n e^{jn\omega t}, \quad \frac{dx}{dt}(t) = \sum_n jn\omega d_n e^{jn\omega t}.$$

Eingesetzt in der Differentialgleichung $\frac{dx}{dt}(t) + x(t) = y(t)$:

$$\sum_n jn\omega d_n e^{jn\omega t} + \sum_n d_n e^{jn\omega t} = \sum_n c_n e^{nj\omega t}.$$

Linke Seite geordnet:

$$\sum_n (jn\omega + 1) d_n e^{jn\omega t} = \sum_n c_n e^{nj\omega t}.$$

Dies ergibt

$$d_n = \frac{c_n}{1 + jn\omega}$$

und die Funktion $x(t)$ besitzt die Fourierreihe

$$x(t) = \sum_n \frac{c_n}{1 + jn\omega} e^{jn\omega t}.$$

Dies ist die gesuchte partikuläre Lösung.

(ii) Zusammenhang zur Laplacetransformation: Die Transferfunktion von

$$\frac{dx}{dt}(t) + x(t) = y(t)$$

ist

$$G(s) = \frac{1}{1 + s}.$$

Somit sind die Fourierkoeffizienten von $x(t)$ gegeben durch

$$d_n = G(jn\omega)c_n.$$

1.17. Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch Fourierreihen.

1.17.1. *Herleitung der Wärmeleitungsgleichung.* Die Basis zur Herleitung der Wärmeleitungsgleichung bildet das *Wärmeleitungsgesetz von Fourier*:

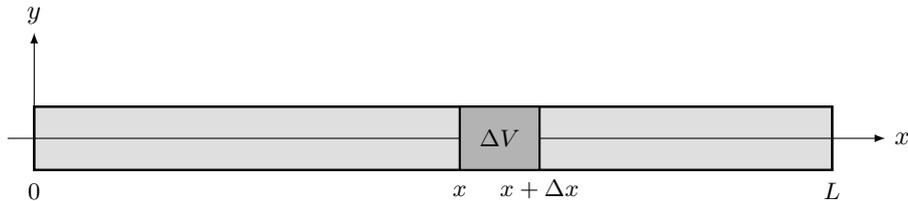
$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} u,$$

wobei wir mit \vec{q} den Wärmefluss pro Fläche (senkrecht zu \vec{q}), mit u die Temperatur und mit k die Wärmeleitfähigkeit bezeichnen. Das Gesetz besagt somit dass der Wärmefluss pro Fläche proportional ist zum negativen Gradienten der Temperatur.⁴

Im folgenden betrachten wir einen langen, dünnen und homogenen Stab mit Achse entlang der x -Achse zwischen 0 und L . Der Stab sei auf seiner Mantelfläche thermisch isoliert. Folglich hängt die Temperatur nur von der x -Koordinate und der Zeit t ab, i.e. $u = u(t, x)$. Die y - und z -Komponenten von obiger Gleichung sind dann gleich Null, i.e. die Gleichung wird zu

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Wir betrachten ein kleines Volumen ΔV des Stabes zwischen x und $x + \Delta x$:



Wir haben $\Delta V = A\Delta x$, wobei wir mit A die Querschnittsfläche des Stabes bezeichnen. Die innere (thermische) Energie des Volumens ΔV ist gegeben durch

$$Q = \rho c \Delta V u = \rho c A \Delta x u,$$

wobei wir mit ρ die Dichte und mit c die spezifische Wärmekapazität bezeichnen.⁵ Wir nehmen hier an dass die Temperatur im Volumen ΔV konstant ist. Diese Annahme ist nur korrekt wenn das Volumen ΔV infinitesimal klein ist. Wir werden somit im Verlauf der Herleitung (siehe weiter unten) den Grenzwert $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ betrachten. Der Wärmefluss in das Volumen ΔV ist gegeben durch die Differenz des Wärmeflusses bei x und bei $x + \Delta x$:

$$\text{Wärmefluss in das Volumen } \Delta V = A(q(t, x) - q(t, x + \Delta x)).$$

⁴Die Wärmeleitfähigkeit besitzt die SI-Einheit $[k] = \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ und somit ergibt sich für den Wärmefluss \vec{q} die Einheit $[\vec{q}] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

⁵Einheiten: $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $[c] = \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$

Die Energieerhaltung besagt nun dass die zeitliche Änderung der inneren Energie des Volumens ΔV gleich dem Wärmefluss in das Volumen ΔV sein muss:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) = A(q(t, x) - q(t, x + \Delta x)).$$

Mit dem obigen Ausdruck für Q wird diese Gleichung zu

$$\rho c A \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = A(q(t, x) - q(t, x + \Delta x)),$$

i.e.

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{q(t, x) - q(t, x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= k \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Grenzwert davon wenn $\Delta x \rightarrow 0$. Dies führt auf die *Wärmeleitungsgleichung*:

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x).$$

Mit $a^2 = \frac{k}{\rho c}$ ⁶ ist dies (ohne Argumente)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1.17.2. *Anfangs- und Randbedingungen.* Als Randbedingungen setzen wir

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0$$

i.e. die Temperatur am Anfang und am Ende des Stabes soll 0K betragen. Als Anfangsbedingung geben wir eine Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$ vor, i.e. wir setzen $u(0, x) = f(x)$ für eine gegebene Funktion $f(x)$ und nehmen an dass $f(x) \neq 0$. Insgesamt betrachten wir somit das folgende Anfangs- und Randwertproblem:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, \\ u(0, x) = f(x), \end{cases}$$

wobei die Funktion $f(x)$ und die Konstante a gegeben sind.

1.17.3. *Separationsansatz.* Wir machen den Ansatz

$$u(t, x) = T(t)X(x).$$

Eingesetzt in der Wärmeleitungsgleichung ergibt sich⁷

$$\frac{dT}{dt} X = a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2}.$$

Umgeformt (und die ' -Notation verwendet) ergibt sich

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

⁶Die Konstante a^2 heisst *Temperaturleitfähigkeit*. Einheit: $[a^2] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$.

⁷Die partiellen Ableitungen werden zu gewöhnlichen Ableitungen, da die Funktionen $T(t)$, $X(x)$ jeweils nur von einem Argument abhängen.

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von t und die rechte Seite dieser Gleichung hängt nur von x ab. Da die Variablen t und x unabhängig sind, müssen die beiden Seiten dieser Gleichung konstant sein, i.e. es gilt

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

für eine unbekannte Konstante λ . Daraus ergeben sich nun die folgenden beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \\ T' = a^2 \lambda T. \end{cases}$$

1.17.4. *Lösung der Gleichung $X'' = \lambda X$.* Die Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ werden zu $X(0) = X(L) = 0$, i.e. wir haben das Randwertproblem

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases}$$

Für die Lösung unterscheiden wir drei Fälle für die unbekannte Konstante λ :

(i) $\lambda = 0$: Die Gleichung wird zu $X'' = 0$ mit allgemeiner Lösung $X(x) = Ax + B$.

Aus der Randbedingung $X(0) = B \stackrel{!}{=} 0$ folgt $B = 0$ und aus der Randbedingung $X(L) = AL \stackrel{!}{=} 0$ folgt $A = 0$, i.e. wir finden die Lösung $X(x) \equiv 0$. Diese Lösung in den Ansatz $u(t, x)$ eingesetzt führt jedoch auf $u(t, x) = T(t)X(x) \equiv 0$, i.e. auf eine verschwindende Temperaturverteilung zu jedem Zeitpunkt, was mit den Anfangsbedingungen einer nicht-verschwindenden Temperaturverteilung nicht kompatibel ist. Wir verwerfen diese Lösung.

(ii) $\lambda > 0$: Sei $\lambda = \alpha^2$. Die Gleichung $X'' = \alpha^2 X$ besitzt die allgemeine Lösung $X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$. Aus $X(0) = A + B \stackrel{!}{=} 0$ folgt $A = -B$. Aus $X(L) = A(e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}) \stackrel{!}{=} 0$ folgt $\alpha = 0$ und somit $X(x) = 0$. Wir verwerfen diese Lösung aus dem selben Grund wie in Fall (i).

(iii) $\lambda < 0$: Sei $\lambda = -\alpha^2$. Die Gleichung $X'' = -\alpha^2 X$ besitzt die allgemeine Lösung $X(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$. Aus $X(0) = A \stackrel{!}{=} 0$ folgt $A = 0$. Aus $X(L) = B \sin(\alpha L) \stackrel{!}{=} 0$ folgt $\sin(\alpha L) = 0$, i.e. $\alpha L = n\pi$ mit $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ (der Fall $n = 0$ führt wieder auf die Lösung $X(x) = 0$ und wird verworfen). Somit ergibt sich für die unbekannte Konstante λ

$$\lambda = -\alpha^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

I.e. wir haben unendlich viele Möglichkeiten für die Konstante λ . Die dazugehörigen Lösungen der Gleichung $X'' = \lambda X$ sind

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

I.e. wir finden unendlich viele Lösungen der Gleichung $X'' = \lambda X$. Jede dieser Lösungen beinhaltet eine (noch zu bestimmende) Konstante B_n .

1.17.5. *Lösung der Gleichung $T' = a^2 \lambda T$.* Die allgemeine Lösung lautet $T(t) = De^{a^2 \lambda t}$. Zusammen mit den möglichen Werten $\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ (siehe obigen Fall (iii)) haben wir die Lösungen⁸

$$T_n(t) = D_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 a^2 t}{L^2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

⁸Zur übersichtlicheren Darstellung verwenden wir die Notation $\exp(x) = e^x$.

Jede dieser Lösungen beinhaltet eine (noch zu bestimmende) Konstante D_n .

1.17.6. *Lösung der Wärmeleitungsgleichung.* Aus den obigen Lösungen der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten wir die folgenden Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_n(t, x) &= T_n(t)X_n(x) \\ &= C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

wobei wir $C_n = B_n D_n$ gesetzt haben. Die Lösungen $u_n(t, x)$ erfüllen die Randbedingungen $u(t, 0) = u(t, L) = 0$. Somit erfüllt auch eine beliebige Linearkombination dieser Lösungen die Randbedingungen.

Um die Anfangsbedingung $u(0, x) = f(x)$ zu erfüllen setzen wir als Lösung die folgende Linearkombination an

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}\right).$$

Die Anfangsbedingung $u(0, x) = f(x)$ wird zu

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x).$$

Somit sind die C_n die Koeffizienten der Fourier-Sinusreihe der Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, L]$! Diese sind gegeben durch (siehe Abschnitt zur Fourier-Sinusreihe)

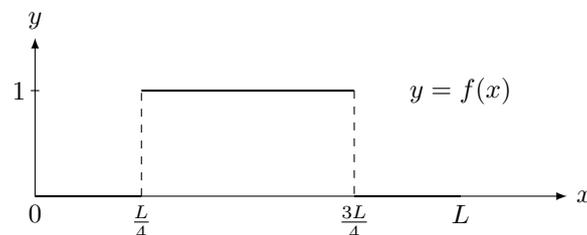
$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Diesen Ausdruck in die obige Linearkombination für $u(t, x)$ eingesetzt ergibt die Lösung des Anfangs- und Randwertproblems:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(\chi) \sin\left(\frac{n\pi\chi}{L}\right) d\chi \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}\right).$$

1.17.7. *Beispiel.* Als Beispiel betrachten wir die folgende Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{L}{4}, \\ 1 & \frac{L}{4} \leq x < \frac{3L}{4}, \\ 0 & \frac{3L}{4} \leq x < L. \end{cases}$$



Physikalisch kann man sich den Stab aus drei Teilen des selben Materials und Querschnitts vorstellen, wobei der mittlere Teil die Temperatur $u = 1$ und die äusseren Teile die Temperatur $u = 0$ besitzen und zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammengefügt werden. Die äusseren Enden werden auf der Temperatur $u = 0$ gehalten, was den obigen Randbedingungen entspricht.

Wir haben

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{n\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right). \end{aligned}$$

Somit ist die Temperaturverteilung im Stab gegeben durch

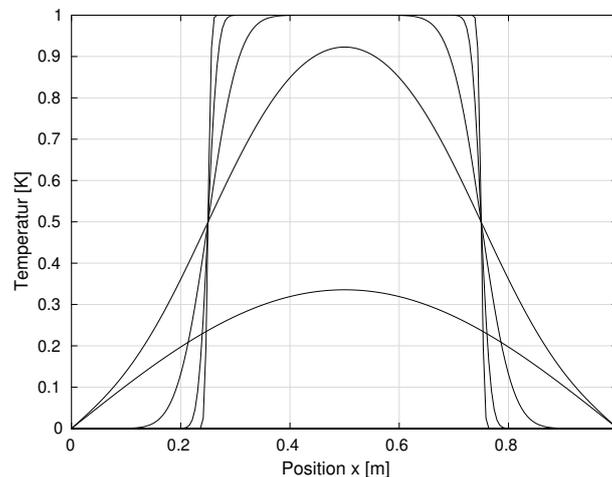
$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2}{L^2} t\right).$$

Das folgende Programm zeichnet die Temperaturverteilung im Stab für $t = 1, 10, 100, 1000, \dots$ Sekunden. Die Stablänge ist $L = 1$ m. Als Material wird Stahl verwendet, was $a^2 \approx 10^{-5} \frac{\text{Wm}^2}{\text{K}}$ entspricht.

```

MATLAB
k=2000;l=200;a=sqrt(10^(-5));
n=linspace(1,k,k);x=linspace(0,1,1);
cn=(cos(n*pi/4)-cos(3*n*pi/4))*2./(n*pi);%Fourierkoeffizienten
F=sin(x.*n*pi);
for tt=0:1:10
    t=10^tt;
    u=F*(cn.*exp(-n.^2*pi^2*a^2*t))';
    plot(x,u,'k')
    grid on;axis([0,1,0,1]);
    hold on
end
xlabel('Position x [m]');ylabel('Temperatur [K]');

```



2. DISKRETE FOURIERTRANSFORMATION

Bisher haben wir Fourierreihen für Funktionen $f(t)$ berechnet, welche für beliebige $t \in \mathbb{R}$ definiert sind. Werden aber Messungen durchgeführt, so sind die Funktionswerte nur für diskrete t -Werte bekannt. Die Integrale, welche in den Formeln der Fourierkoeffizienten auftreten, müssen somit durch Summen approximiert werden. Diese Approximation der Integrale durch Summen entspricht der *Diskreten Fouriertransformation*. Eine sehr effiziente Berechnung dieser Summen führt auf die *FFT* (Fast Fourier Transform), welche heutzutage in jeder Software die sich mit Fouriermethoden beschäftigt implementiert ist. Die Effizienz von FFT erlaubt es zum Beispiel Bildverarbeitung mit Fouriermethoden in Echtzeit durchzuführen und ist einer der Hauptgründe für die weite Verbreitung von Fourieranwendungen in der Technik.

2.1. Berechnung der Fourierkoeffizienten. Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion. Aufgrund einer Messung gehen wir davon aus dass die Funktionswerte von f an N äquidistanten Punkten

$$t_k = k \frac{T}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

gegeben sind (man sagt auch die Funktion wurde an diesen Punkten 'abgetastet'). Die Funktionswerte (auch Abtastwerte genannt) an diesen Punkten notieren wir als f_k :

$$f_k = f(t_k) = f\left(k \frac{T}{N}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Als Vektor geschrieben

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Dies ist der Vektor der Funktionswerte welche gemessen wurden. Da die Funktion $f(t)$ T -periodisch ist, gilt $f_0 = f_N$.

Nun approximieren wir die Fourierkoeffizienten c_n indem wir nur die diskreten Funktionswerte f_k verwenden. Dazu approximieren wir das auftretende Integral in der Formel für c_n mit einer Riemannschen Summe, in welcher wir jeweils die Funktionswerte am linken Rand der Teilintervalle verwenden:⁹

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \approx \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jn\omega kT/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk2\pi/N}, \end{aligned}$$

⁹Erinnerung Riemannsche Summe für $\int_a^b g(t) dt$:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n g(\xi_i).$$

Diese Formel wird mit $b-a = T$, $n = N$, $g(t) = f(t)e^{-jn\omega t}$ und $\xi_i = t_i = iT/N$ verwendet. Zusätzlich lassen wir den Index nicht von 1 bis n sondern von 0 bis $N-1$ laufen und nennen ihn k .

wobei wir für die zweite Zeile $\omega = 2\pi/T$ verwendet haben. Diese approximativen Werte für die Fourierkoeffizienten c_n nennen wir y_n , i.e. wir haben

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk2\pi/N}.$$

Wegen

$$y_{n+N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-j(n+N)k2\pi/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk2\pi/N} \underbrace{e^{-jNk2\pi/N}}_{=e^{-jk2\pi}=1} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk2\pi/N} = y_n$$

sehen wir dass sich die y_n zyklisch wiederholen, genau wie die f_k . Das heisst dass wir durch die obige Gleichung N verschiedene y -Werte bekommen. In einen Vektor geschrieben:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $\vec{f} \mapsto \vec{y}$ heisst *diskrete Fouriertransformierte* der Funktion f , oder kurz *DFT*. Die Werte im Vektor \vec{y} heissen *Spektralwerte*.

2.2. DFT-Matrizen. Mit

$$w = e^{j2\pi/N}$$

(i.e. w ist die N -te Einheitswurzel) sind die y_n gegeben durch

$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w^{-nk} f_k.$$

Dieser Ausdruck hat die Form einer Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-1 \cdot 1} & w^{-1 \cdot 2} & \dots & w^{-1(N-1)} \\ 1 & w^{-2 \cdot 1} & w^{-2 \cdot 2} & \dots & w^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{-(N-1) \cdot 1} & w^{-(N-1) \cdot 2} & \dots & w^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Die $N \times N$ -Matrix

$$F_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-1 \cdot 1} & w^{-1 \cdot 2} & \dots & w^{-1(N-1)} \\ 1 & w^{-2 \cdot 1} & w^{-2 \cdot 2} & \dots & w^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{-(N-1) \cdot 1} & w^{-(N-1) \cdot 2} & \dots & w^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

heisst *DFT-Matrix*. Ihre Einträge sind¹⁰

$$(F_N)_{nk} = w^{-nk}$$

¹⁰Erinnerung: $(F_N)_{nk}$ ist der Eintrag in der n -ten Zeile und k -ten Spalte, wobei $n, k = 0, 1, \dots, N-1$.

Mit dieser Matrix ist die diskrete Fouriertransformation gegeben als¹¹

$$\vec{y} = \frac{1}{N} F_N \vec{f}.$$

Beispiele:

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

2.3. Inverse diskrete Fouriertransformation. Es gilt

$$F_N \overline{F_N} = \overline{F_N} F_N = N \mathbb{1}, \quad (3)$$

wobei wir mit $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix bezeichnen. Beweis:

$$\begin{aligned} (F_N \overline{F_N})_{km} &= \sum_{l=0}^{N-1} (F_N)_{kl} (\overline{F_N})_{lm} = \sum_{l=0}^{N-1} w^{-kl} \overline{w^{-lm}} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} w^{-kl} w^{lm} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} w^{l(m-k)}, \end{aligned}$$

Für $k = m$ ist dieser Ausdruck

$$\sum_{l=0}^{N-1} w^{l(m-k)} = \sum_{l=0}^{N-1} 1 = N.$$

Für $k \neq m$ und mit der Notation $z = w^{m-k}$ ist der obige Ausdruck

$$\sum_{l=0}^{N-1} w^{l(m-k)} = \sum_{l=0}^{N-1} z^l = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z} = 0,$$

wobei wir die Formel für die geometrische Reihe und für die letzte Gleichung $z^N = w^{N(m-k)} = e^{j2\pi N(m-k)/N} = e^{j2\pi(m-k)} = 1$ verwendet haben. Insgesamt finden wir

$$(F_N \overline{F_N})_{km} = \begin{cases} N & k = m, \\ 0 & k \neq m, \end{cases}$$

Dies beweist die erste Gleichung in (3). Die zweite folgt analog.

Somit folgt dass die DFT-Matrix F_N invertierbar ist und

$$F_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{F_N}.$$

Folglich gilt

$$\vec{y} = \frac{1}{N} F_N \vec{f}, \quad \vec{f} = \overline{F_N} \vec{y}.$$

Die zweite Gleichung ist die Matrixformulierung der *inversen diskreten Fouriertransformation*. Die zweite Gleichung in Komponenten:

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} w^{kn} y_n = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi nk/N} y_n.$$

¹¹Der Vorfaktor $\frac{1}{N}$ wird nicht zu der Matrix F_N hinzugenommen. Dies weil genau dieser Faktor in vielen Softwarepaketen an einer anderen Stelle 'versorgt' wird und somit jeweils speziell beachtet werden muss. Siehe auch den Abschnitt zu FFT mit Matlab.

2.4. Gegenüberstellung.

	kontinuierlich	diskret
Zeitbereich	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi t/T}$	$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{jnk2\pi/N}$
Frequenzbereich	$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn2\pi t/T} dt$	$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-jnk2\pi/T}$

Kurzfassung: Wird die T -periodische Funktion $f(t)$ in konstanten Zeitabständen $\Delta t = T/N$ abgetastet, so erhält man eine N -periodische Folge von Abtastwerten. Von dieser Folge betrachtet man die ersten N Werte und steckt sie in einen Vektor \vec{f} . Aus diesem Vektor erzeugt man mittels der obigen Formeln den Vektor \vec{y} der Spektralwerte (diskrete Fouriertransformation). Aus den Spektralwerten alleine lassen sich die Abtastwerte wieder rekonstruieren (inverse diskrete Fouriertransformation).

2.5. Fast Fourier Transform (FFT). Die obige Darstellung der diskreten Fouriertransformation:

$$\vec{y} = \frac{1}{N} F_N \vec{f}$$

in Form einer Multiplikation einer Matrix (F_N) mit einem Vektor (\vec{f}) ergibt dass zur Berechnung von \vec{y} aus einem gegebenen Vektor \vec{f} die Anzahl von N^2 Multiplikationen nötig sind. Dies ist in der Praxis oft zu langsam.

Beim Inspizieren der DFT hat man herausgefunden dass bei der Berechnung viele Faktoren mehrmals auftreten und sich somit durch cleveres sortieren der Einträge von \vec{f} und Organisieren der Multiplikationen der Rechenaufwand reduzieren lässt. Das Verfahren das sich ergab heisst FFT-Algorithmus. Sein Rechenaufwand für einen Vektor \vec{f} mit N Einträgen beträgt nur

$$N \log_2(N)$$

Multiplikationen.

Bemerkungen:

- (i) Wir geben keinen Beweis für die obige Formel. Stichworte zum Nachschlagen: Cooley-Tukey-Algorithmus, Butterfly Diagramm, ...
- (ii) Die obige Angabe der Anzahl Multiplikationen ist nur für N gleich einer Zweierpotenz richtig (z.B. $n = 1024$). Für N nicht gleich einer Zweierpotenz ist der Algorithmus nicht ganz so effizient.

2.6. FFT mit Matlab/Octave. Wir illustrieren am Beispiel der 2π -periodischen Rechtecksfunktion:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi, \\ -1 & \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

Die dazugehörige Fourierreihe (in reeller Form) ist

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{1}{n} \sin(nt) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \dots \right). \end{aligned}$$

Wir wollen die Funktion über eine Periode $T = 2\pi$ in Intervallen von $T/N = T/2^7$ abtasten. In Matlab:

MATLAB

```

N=2^7;t=linspace(0,2*pi,N+1);           %t-Werte
f=-sign(t-pi);                          %f-Werte
f(1)=(f(1)+f(N+1))/2;f(N+1)=f(1);       %Periodizitaet
plot(t,f,'k','LineWidth',3);grid on     %Graf f(t)
xlabel(['t [s]']);ylabel('f(t)');

```

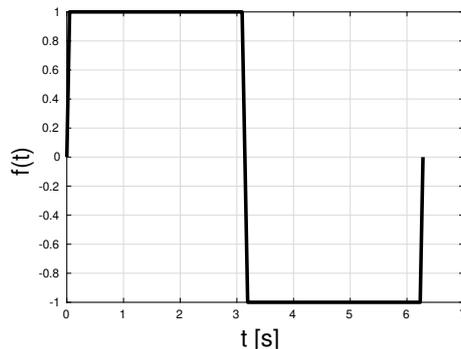
Bemerkungen:

- (i) In der ersten Zeile erzeugen wir $N + 1$ t -Werte.
- (ii) In der zweiten Zeile werden die Funktionswerte berechnet. Die Funktion $\text{sign}(t)$ ist gegeben durch

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0, \\ 0 & t = 0, \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

Man sagt dieser Funktion auch *Vorzeichenfunktion*. Diese Funktion um π nach rechts verschoben und mit -1 multipliziert ergibt im Intervall $[0, 2\pi)$ die Standardrechtecksfunktion.

- (iii) In der dritten Zeile ändern wir den ersten und letzten Funktionswert, so dass die Funktion periodisch ist. Diese Schritte sind eher kosmetischer Natur und werden in der Praxis oft nicht durchgeführt. Gerade bei einer grossen Anzahl von Abtastwerten fallen zwei Funktionswerte nicht ins Gewicht.
- (iv) Die letzten beiden Zeilen erzeugen den Graphen der Funktion $f(t)$. In einer solchen Darstellung werden die einzelnen diskreten Punkte mit Linien verbunden, i.e. diese Grafik hat keinen Sprung:



Das folgende Teilprogramm berechnet nun die diskrete Fouriertransformation mit FFT.:

```

MATLAB
f=f(1:N);           %Vektor f
y=fft(f)/N;y=y(:); %Vektor y, als Spaltenvektor
y(1:10)             %Darstellung der ersten 10 Fourierkoeffizienten
>> fft_1
ans =
    0.0000 + 0.0000i
    0.0000 - 0.6365i
    0.0000 + 0.0000i
    0.0000 - 0.2118i
    0.0000 + 0.0000i
    0.0000 - 0.1267i
    0.0000 + 0.0000i
   -0.0000 - 0.0900i

```

```
0.0000 + 0.0000i
0.0000 - 0.0696i
```

Bemerkungen:

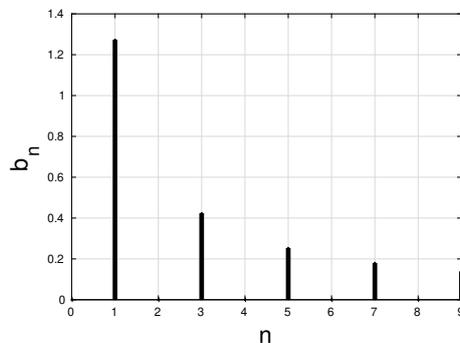
- (i) Erste Zeile: Im folgenden werden N Funktionswerte verwendet, dies entspricht dem Vektor \vec{f} .
- (ii) Zweite Zeile: Hier wird die diskrete Fouriertransformation berechnet. Der Vorfaktor $\frac{1}{N}$ welcher benötigt wird ist Matlab-spezifisch. Der Befehl `y=y(:)` ergibt y als Spaltenvektor. Achtung: Der Befehl `y'` würde auch einen Spaltenvektor erzeugen, jedoch sind dann die Einträge konjugiert-komplex zu y , i.e. bei den Imaginärteilen ändert das Vorzeichen.

Der erste Koeffizient ist gleich Null, i.e. $c_0 = 0$, i.e. der Mittelwert der Funktion ist gleich Null. Wir sehen dass die Koeffizienten verschwindende Realteile haben, i.e. die reelle Fourierreihe besitzt keine Kosinusterme. Die Koeffizienten der Sinusterme sind gegeben durch

$$b_n = -2\text{Im}(c_n).$$

MATLAB

```
b=-2*imag(y); %Berechnung der b_n aus den c_n
stem([0:9],b(1:10),'.', 'LineWidth',4) %Grafische Darstellung Spektrum
xlabel(['n']);ylabel('b_n');grid on
```

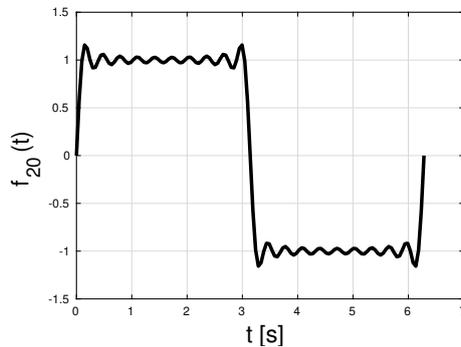


Das folgende Teilprogramm rekonstruiert nun die Funktion $f(t)$ indem die ersten 20 Terme der Fourierreihe dargestellt werden, i.e. es wird die 20-te Partialsumme dargestellt.

MATLAB

```
f20=zeros(size(t))
for n=0:20
    f20=f20+b(n+1)*sin(n*t);
end
plot(t,f20,'k','LineWidth',3);grid on
xlabel(['t [s]']);ylabel('f_{20}(t)');
```

Bemerkung: Der Index für die b_n ist $n + 1$, da in Matlab der Index eines Vektors mit 1 und nicht mit 0 beginnt.

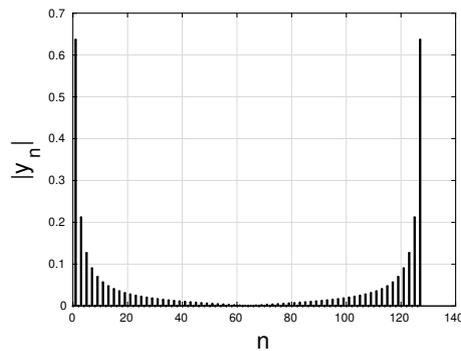


2.7. **Aliasing.** Wir tragen mit dem folgenden Teilprogramm das gesamte Spektrum $|y_n|$ auf:

```

MATLAB
stem([0:N-1],abs(y),'.', 'LineWidth',2)
xlabel(['n']);ylabel('|c_n|');grid on

```



Der auftretende Effekt lässt sich folgendermassen erklären:

- (i) Wir wissen dass für die Koeffizienten c_n gilt (siehe Seite 14)

$$c_{-n} = \overline{c_n}.$$

Mit dem Betrag gilt somit

$$|c_{-n}| = |c_n|,$$

i.e. das Spektrum von $|c_n|$ ist symmetrisch bezüglich $n = 0$ (siehe dazu zum Beispiel die Grafik auf Seite 17). Dies überträgt sich auf die diskreten Koeffizienten, i.e. es gilt

$$|y_{-n}| = |y_n|.$$

- (ii) Periodizität der diskreten Fourierkoeffizienten: Es gilt (siehe Seite 32)

$$y_{n+N} = y_n,$$

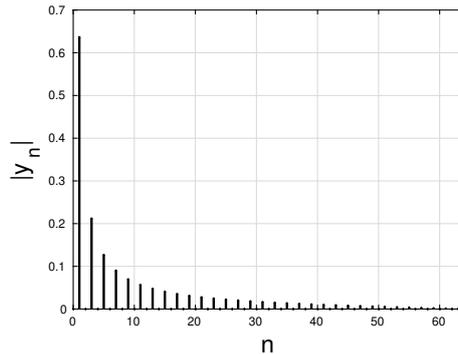
i.e. die Fourierkoeffizienten wiederholen sich zyklisch.

Es folgt somit dass das gesamte Spektrum $|y_n|$ aus dem Spektrum der $|y_n|$ für $n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ durch Spiegelung und zyklische Fortsetzung gewonnen werden kann. I.e. die Information über die spektrale Zusammensetzung eines Signals, welches durch diskrete Fouriertransformation aus einem Vektor \vec{f} mit N Einträgen gewonnen wird, ist in den ersten $\frac{N}{2}$ Einträgen des Vektors $|\vec{y}|$ enthalten. Weitere Einträge sind durch die

mathematischen Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation gegeben, haben aber mit dem Signal nichts zu tun.

Für die Praxis hat dies die folgende wichtige Konsequenz: Wird ein Signal beispielsweise mit einer Frequenz von 44 kHz abgetastet (i.e. 44000 Messungen pro Sekunde), so werden durch die diskrete Fouriertransformation Anteile im Signal mit einer Frequenz von bis zu 22 kHz richtig dargestellt. Dieser Effekt heisst *Aliasing*. Allgemein: Die Abtastfrequenz muss mindestens zweimal so gross sein wie die maximale Signalfrequenz die man messen möchte. Die maximal registrierbare Signalfrequenz heisst *Nyquistfrequenz*.

In obigem Beispiel werden somit Beiträge bis zu $n = \frac{N}{2} = \frac{2^7}{2} = 64$ richtig dargestellt. Das relevante Spektrum der $|y_n|$ ist:



Aliasingeffekte treten auch im Alltag auf. Wird beispielsweise ein fahrendes Auto mit einer gewissen Abtastfrequenz gefilmt (=wieviele Bilder macht die Kamera pro Sekunde) und drehen sich die Räder mit einer Frequenz welche über der halben Abtastfrequenz liegt, so scheinen sich im Film die Räder rückwärts zu drehen.

2.8. Bemerkungen zur Anwendung von fft.

- (i) In der obigen Darstellung des Spektrums haben wir den Betrag der $c_n \approx y_n$ aufgezeichnet. In der Praxis interessiert man sich aber nicht für den Betrag der komplexen Fourierkoeffizienten, sondern für die Amplituden der Anteile im Signal in Abhängigkeit von n . Das heisst welche Amplitude hat der Anteil im Signal, welcher zu einer gewissen Frequenz gehört? Jetzt gibt es natürlich zu jedem n eine Amplitude für den Kosinus- und eine für den Sinusanteil. Mit der Umrechnung

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t + \phi),$$

sehen wir jedoch dass die relevante Amplitude gegeben ist durch

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|.$$

Somit ist der relevante Befehl für die Praxis, um aus den Abtastwerten \vec{f} das Spektrum in Abhängigkeit von n zu berechnen:

$$\boxed{2 * \text{abs}(\text{fft}(f)) / N}.$$

(Die Phase interessiert meist nicht).

- (ii) Will man das Spektrum nicht in Abhängigkeit von n , sondern in Abhängigkeit der Frequenz aufzeichnen, so muss man sich überlegen zu welcher Frequenz $n = 1$ gehört und dann reskallieren: Beim Aufbau der diskreten Fouriertransformation sind wir davon ausgegangen, dass im Vektor \vec{f} eine Anzahl von N Werten einer T -periodischen Funktion, äquidistant über eine Periode T gemessen, abgelegt sind. Somit entspricht $n = 1$ der Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$. Oder in Hz: $\nu = 1/T$. Meistens ist jedoch die Periode des Signals welches gemessen

wird unbekannt. Wird nun über eine Zeitdauer von T gemessen, so geht die diskrete Fouriertransformation davon aus dass im Vektor \vec{f} trotzdem Werte einer T -periodischen Funktion abgelegt sind, i.e. wieder entspricht $n = 1$ der Frequenz $1/T$. Das heisst um die Amplituden in Abhängigkeit der Frequenz darzustellen muss die horizontale Achse im Spektrum mit $1/T$ skaliert werden, wobei T die Messdauer ist.

Wir illustrieren an einem Beispiel: Wir zeichnen das Spektrum der Funktion

$$f(t) = 3.2 \sin(7 \cdot 2\pi t) - 2.7 \cos(4 \cdot 2\pi t - 130) + \tilde{f}(t),$$

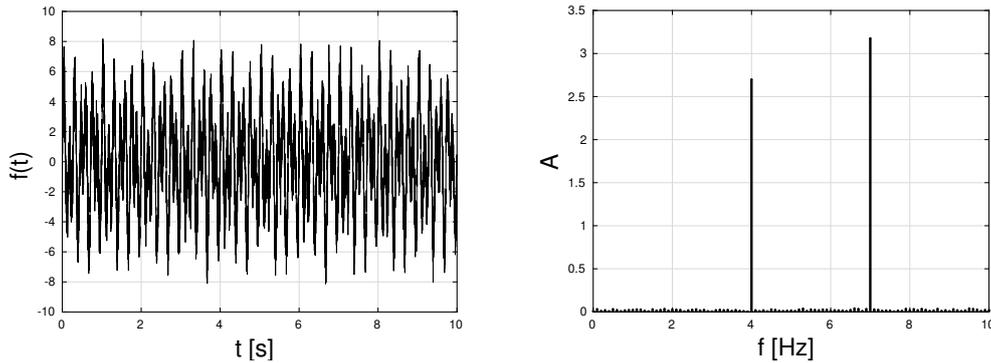
wobei $\tilde{f}(t)$ ein Rauschen sein soll. Wir messen die Funktion über eine Zeit von $T = 10$ s und tasten in dieser Zeit $N = 2^{13}$ mal ab. Mit Matlab:

```

MATLAB
T=10;N=2^13;t=linspace(0,T,N); %t-Werte
f=3.2*sin(7*2*pi*t)-2.7*cos(4*2*pi*t-130)+randn(1,N);%f-Werte
plot(t,f) %Grafik f(t)
xlabel(['t [s]']);ylabel('f(t)');grid on
A=2*abs(fft(f))/N; %Amplituden mit fft
stem([0:100]*(1/T),A(1:101),'.') %Grafik Spektrum
xlabel(['f [Hz]']);ylabel('A');grid on

```

Es ergeben sich die folgenden Grafiken für den Zeit- und Frequenzbereich:



3. FOURIERTRANSFORMATION

Die Theorie der Fourierreihen ist anwendbar auf periodische Funktionen. Das resultierende Spektrum ist diskret, i.e. es befinden sich im Spektrum Amplituden zu vielfachen der Grundfrequenz des Signals. Im folgenden führen wir einen Grenzübergang zu nicht-periodischen Funktionen durch und beobachten dabei den Übergang des diskreten Spektrums in ein kontinuierliches. Motiviert durch diesen Grenzübergang definieren wir die Fouriertransformation.

3.1. Grenzübergang: periodisch zu nicht-periodisch. Der Grenzübergang wird an Hand von folgenden Schritten ausgeführt:

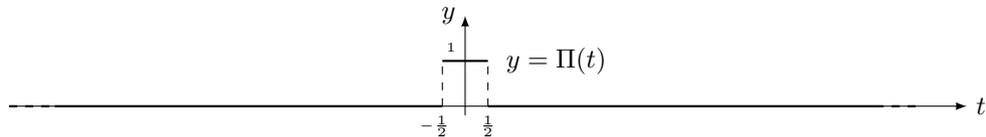
- (i) Wir fragen nach dem Spektrum einer nicht-periodischen Funktion $f(t)$. Dazu nehmen wir in einem ersten Schritt an dass diese Funktion nur für $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ungleich Null ist und ausserhalb dieses Intervalls verschwindet, i.e. gleich Null ist.
- (ii) Um Fourierkoeffizienten bestimmen zu können betrachten wir die Einschränkung der Funktion $f(t)$ auf das Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ und erweitern periodisch.
- (iii) Wir bestimmen die Fourierkoeffizienten für diese periodische Erweiterung.
- (iv) Wir betrachten den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ und den Effekt auf das Spektrum. Der Übergang $T \rightarrow \infty$ hebt die Annahme aus dem ersten Schritt wieder auf, i.e. das gefundene Spektrum ist nun das Spektrum der Funktion $f(t)$.

Diese Schritte führen wir an einem konkreten (und wichtigen) Beispiel aus:

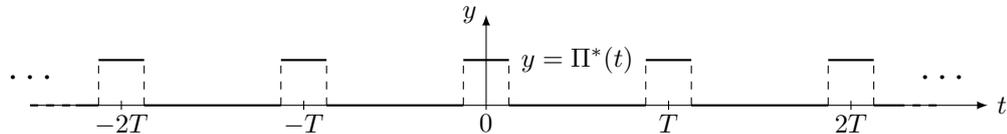
- (i) Wir betrachten die Funktion

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Graph dieser Funktion ist:



- (ii) Wir schränken diese Funktion auf das Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ein. Diese Einschränkung setzen wir T -periodisch fort. Die so entstandene Funktion bezeichnen wir mit Π^* . Der Graph dazu ist:



- (iii) Wir berechnen die Fourierkoeffizienten:

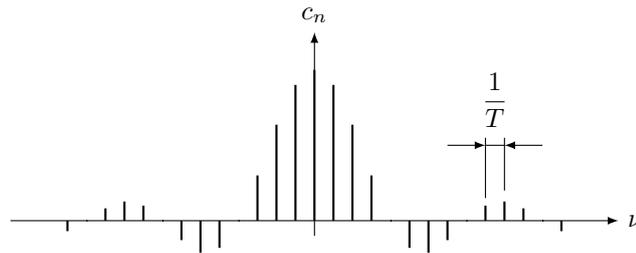
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \Pi^*(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Pi^*(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \Pi(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-jn\omega t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{-jn\omega T} \left(e^{-jn\omega/2} - e^{jn\omega/2} \right) \\
&= \frac{1}{-jn2\pi} \left(e^{-jn\pi/T} - e^{jn\pi/T} \right),
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Zeile $\omega = 2\pi/T$ verwendet haben. Mit der Euleridentität ist dies

$$c_n = \frac{\sin(\pi n/T)}{\pi n}.$$

Wir zeichnen das Spektrum in Abhängigkeit der Frequenz ν :



Die Spektrallinien gehören zu Vielfachen der Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$. Als Frequenz in Hz ausgedrückt gehören sie zu Vielfachen der Grundfrequenz $\nu = \frac{1}{T}$. Das heißt dass die Spektrallinien im obigen Spektrum (mit Frequenz auf der horizontalen Achse) um $\frac{1}{T}$ separiert sind. Die n -te Spektrallinie befindet sich somit an der Position $\frac{n}{T}$.

- (iv) Wir betrachten den Grenzwert $T \rightarrow \infty$. Für die Funktion $\Pi^*(t)$ bedeutet dieser Grenzwert dass die Periode gegen unendlich geht und somit wieder die nicht-periodische Funktion $\Pi(t)$ daraus entsteht.

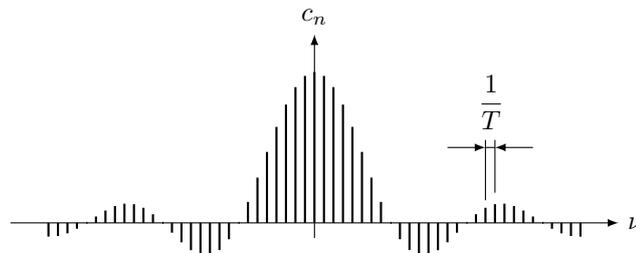
Nun betrachten wir den Effekt auf das Spektrum. Direkte Grenzwertbetrachtung der c_n ist nicht möglich, da

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi n/T)}{\pi n} = 0,$$

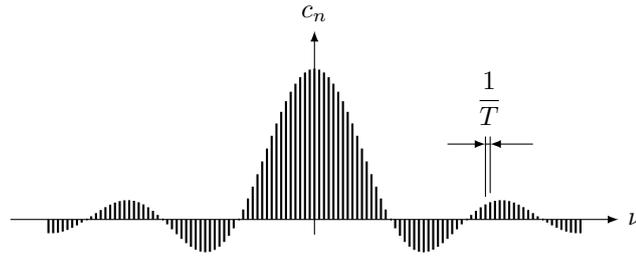
i.e. das Spektrum würde verschwinden und eine Interpretation wäre nicht möglich. Um dieses Problem zu beheben multiplizieren wir die Fourierkoeffizienten mit T , i.e. wir betrachten den Ausdruck

$$Tc_n = T \frac{\sin(\pi n/T)}{\pi n} = \frac{\sin(\pi n/T)}{\pi n/T}.$$

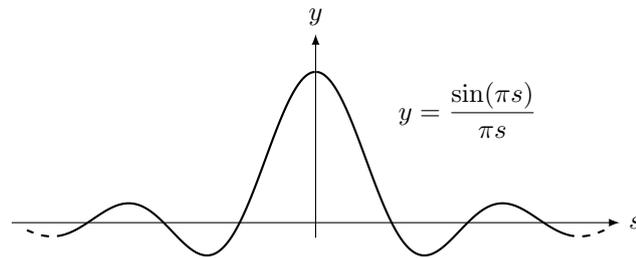
Um ein wenig Intuition für den Grenzwert zu bekommen verdoppeln wir T und zeichnen das Spektrum erneut:



Es wurde genau die gleiche horizontale skallierung wie in der obigen Grafik gewählt. Die Spektrallinien sind doppelt so nahe beieinander. Eine weitere Verdoppelung ergibt:



Wir sehen dass für $T \rightarrow \infty$ die Spektrallinien infinitesimal nahe zueinander kommen. Für $T \rightarrow \infty$ muss zwischen den einzelnen Spektrallinien nicht mehr unterschieden werden, wir ersetzen daher den Ausdruck $\frac{n}{T}$ (dies ist die Position der n -ten Spektrallinie) durch eine kontinuierliche Variable: $s = \frac{n}{T}$ mit $s \in \mathbb{R}$. Im Limes wird das Spektrum somit zur kontinuierlichen Funktion:



Unter dieser Funktion verstehen wir das Spektrum der Funktion $\Pi(t)$.

Zusammengefasst haben wir dieses Spektrum gefunden indem wir den Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T c_n$$

betrachtet haben und dabei den Ausdruck $\frac{n}{T}$ durch eine kontinuierliche Variable $s \in \mathbb{R}$ ersetzt haben.

Für eine beliebige Funktion $f(t)$, welche ausserhalb des Intervalls $[-T/2, T/2]$ verschwindet, haben wir

$$T c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn2\pi t/T} dt$$

und somit ist das kontinuierliche Spektrum gegeben durch die Funktion:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi st} dt.$$

Da wir im Endeffekt den Grenzwert $T \rightarrow \infty$ betrachten, kann schon zu Beginn der Betrachtung T so gross wie nötig gewählt werden, i.e. die Bedingung dass die Funktion $f(t)$ ausserhalb des Intervalls $[-T/2, T/2]$ verschwindet wird entschärft.¹²

3.2. Definition Frouiertransformation. Motiviert durch den Grenzübergang im vorhergehenden Abschnitt definieren wir die *Fouriertransformation* einer Funktion $f(t)$ als

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi st} dt.$$

Bemerkung: Die Variable s besitzt die Interpretation einer Frequenz.

3.3. Beispiele.

¹²Eine genauere Betrachtung liefert die Bedingung dass die Funktion $f(t)$ genügend schnell gegen Null gehen muss für $t \rightarrow \pm\infty$, ansonsten existiert das obige kontinuierliche Spektrum nicht.

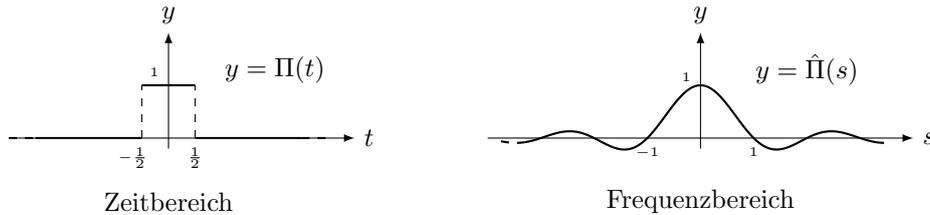
3.3.1. *Die sinc-Funktion.* Ein wichtiges Beispiel haben wir bereits gesehen: Die Funktion

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

besitzt die Fouriertransformation

$$\hat{\Pi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) e^{-j2\pi st} dt = \dots = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}.$$

Wir stellen die Funktion $\Pi(t)$ (Zeitbereich) und ihre Fouriertransformierte $\hat{\Pi}(s)$ (Frequenzbereich) gegenüber:



Die Funktion welche das Spektrum in diesem Beispiel beschreibt heisst *sinc*-Funktion:

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

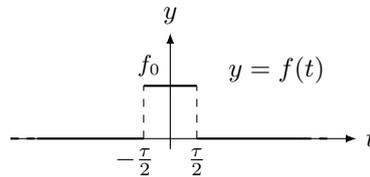
Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

gilt

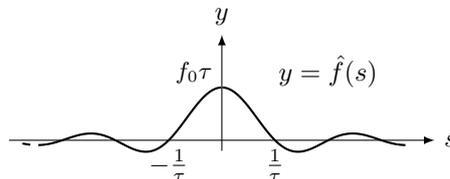
$$\text{sinc}(0) = 1.$$

3.3.2. *Anwendung: Spektrum eines Knalls.* Ein Knall wird im Zeitbereich (vereinfacht) beschrieben durch die Funktion:¹³



Hier ist τ die Dauer und f_0 die Lautstärke des Knalls. Das Spektrum ist gegeben durch die Fouriertransformation:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi st} dt = \dots = \frac{f_0}{\pi s} \sin(\pi s \tau) = f_0 \tau \text{sinc}(s \tau).$$

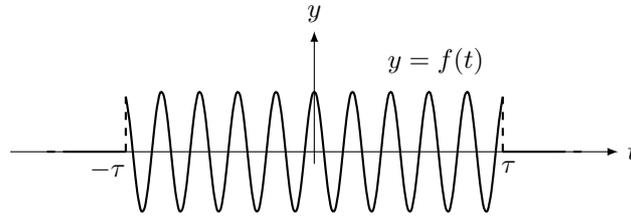


Der wesentliche Teil des Spektrum erstreckt sich von $-1/\tau$ bis $1/\tau$. Somit ist $2/\tau$ die Breite des Spektrums. Wir machen die folgende wichtige Beobachtung (allgemeine Betrachtung siehe später): Die Breite des Spektrums ist reziprok zur Knalldauer. I.e. wird die Knalldauer verkürzt, so verbreitert sich das Spektrum und umgekehrt. Anders ausgedrückt: Die Knalldauer multipliziert mit der Breite des Spektrums ist eine Konstante.

¹³Diese Funktion beschreibt beispielsweise den Druck auf eine Fläche in Abhängigkeit der Zeit.

3.3.3. *Der abgeschnittene Kosinus.* Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & -\tau \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Für die Berechnung der Fouriertransformation schreiben wir den Kosinusterm mit der Euleridentität um:

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi st} dt = \int_{-\tau}^{\tau} \cos(\omega_0 t)e^{-j2\pi st} dt \\ &= \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-j2\pi st} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} e^{j(\omega_0 - 2\pi s)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j(\omega_0 + 2\pi s)t} dt. \end{aligned}$$

Wir bestimmen das erste dieser beiden Integrale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} e^{j(\omega_0 - 2\pi s)t} dt &= \frac{e^{j(\omega_0 - 2\pi s)\tau} - e^{-j(\omega_0 - 2\pi s)\tau}}{2j(\omega_0 - 2\pi s)} \\ &= \frac{\sin((\omega_0 - 2\pi s)\tau)}{\omega_0 - 2\pi s} \\ &= \tau \operatorname{sinc}\left((\omega_0/\pi - 2s)\tau\right). \end{aligned}$$

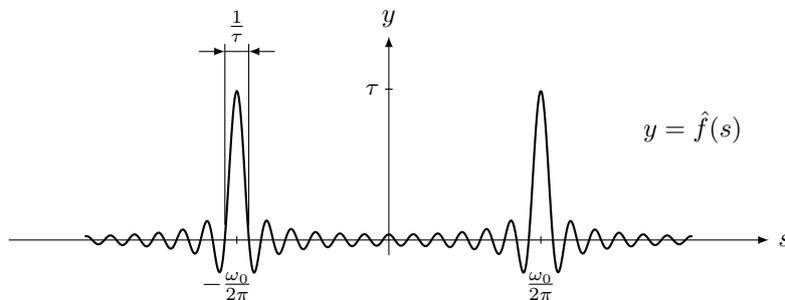
Analog gilt

$$\frac{1}{2} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j(\omega_0 + 2\pi s)t} dt = \tau \operatorname{sinc}\left((\omega_0/\pi + 2s)\tau\right).$$

Das heisst wir haben

$$\hat{f}(s) = \tau \operatorname{sinc}\left((\omega_0/\pi - 2s)\tau\right) + \tau \operatorname{sinc}\left((\omega_0/\pi + 2s)\tau\right),$$

i.e. die Fouriertransformierte ist die Summe von zwei sinc-Funktionen. Die beiden Sinc-Funktionen sind konzentriert um $s = \pm \frac{\omega_0}{2\pi}$. Davon weg fallen sie stark ab. Somit kann die Fouriertransformierte approximativ durch zwei sinc-Funktionen gezeichnet werden:



Die Breite der sinc-Funktionen ist $1/\tau$. I.e. wieder ist die Breite des Spektrums reziprok zur Ausdehnung der Funktion in der Zeit.

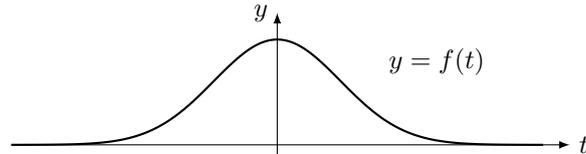
Für $\tau \rightarrow \infty$ handelt es sich bei $f(t)$ um die periodische Funktion $f(t) = \cos(\omega_0 t)$. Das Spektrum wird zu zwei Spektrallinien bei $\pm \frac{\omega_0}{2\pi}$, i.e. wir bekommen das diskrete Spektrum

der Kosinusfunktion. Bemerkung: Beim Übergang von diskret zu kontinuierlich haben wir $c_n T$ betrachtet. Aus dem selben Grund müsste man die Grösse der Amplituden im obigen Spektrum durch 2τ (die Dauer des abgeschnittenen Kosinus) betrachten. Wir bekämen $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$ und somit das reelle Spektrum $a_1 = 2\text{Re}(c_1) = 1$, was für die Funktion $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ zu erwarten ist.

3.3.4. *Gauss'sche Glockenkurve.* Sei

$$f(t) = e^{-\pi t^2}.$$

Diese Funktion heisst *Gauss-Funktion*, *Gauss'sche Glockenkurve*,... Der Graph dieser Funktion ist:



Die Fouriertransformierte davon ist gegeben durch

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-j2\pi st} dt.$$

Die Funktion ist nicht elementar integrierbar. Wir berechnen das Integral an Hand der folgenden Schritte:

(i)

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{ds}(s) &= \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-j2\pi st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} \frac{d}{ds} (e^{-j2\pi st}) dt \\ &= j \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\pi t^2} (-2\pi t)}_{=\frac{df}{dt}(t)} \underbrace{e^{-j2\pi st}}_{=g(t)} dt \\ &= j \left(\underbrace{e^{-\pi t^2} e^{-j2\pi st} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} (-j2\pi s) e^{-j2\pi st} dt \right) \\ &= -2\pi s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-j2\pi st} dt \\ &= -2\pi s \hat{f}(s), \end{aligned}$$

wobei wir von der dritten auf die vierte Zeile partiell integriert haben. Wir sehen also dass die Funktion \hat{f} die Differentialgleichung

$$\frac{d\hat{f}}{ds}(s) = -2\pi s \hat{f}(s)$$

erfüllt.

(ii) Die Differentialgleichung kann mit Separation gelöst werden. Separation

$$\int \frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = \int -2\pi s ds$$

liefert

$$\hat{f}(s) = C e^{-\pi s^2}, \quad \text{mit} \quad C = \hat{f}(0).$$

I.e.

$$\hat{f}(s) = \hat{f}(0)e^{-\pi s^2}.$$

(iii) Die Konstante

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt$$

bestimmen wir folgendermassen: Die Substitution $u = \sqrt{\pi}t$ ergibt die Vereinfachung

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Sei nun I dieses verbleibende Integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \right)^2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left. -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right|_0^{\infty} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi \\ &= \pi, \end{aligned}$$

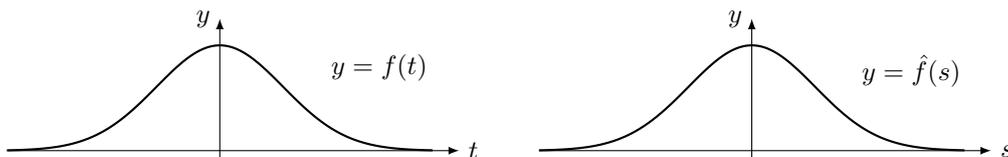
wobei wir von der dritten auf die vierte Zeile das Doppelintegral auf Polarkoordinaten umschreiben. I.e. wir finden $I = \sqrt{\pi}$ und somit

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1.$$

Zusammen mit $\hat{f}(s) = \hat{f}(0)e^{-\pi s^2}$ ergibt sich das Resultat:

$$\hat{f}(s) = e^{-\pi s^2}.$$

I.e. die Fouriertransformation ist wieder eine Gaußkurve!



3.4. Inverse Fouriertransformation.

3.4.1. *Heuristischer Grenzübergang.* Bevor wir die inverse Fouriertransformation hinschreiben betrachten wir eine T -periodische Funktion $f(t)$ gegeben durch ihre Fourierreihe und führen daran den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ durch. Diese (heuristische) Betrachtung wird uns den Ausdruck für die inverse Fouriertransformation liefern. Die verwendeten Ideen sind analog zum Übergang in 3.1.

Die Funktion $f(t)$ geschrieben als Fourierreihe ist

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Wir schreiben dies als

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T c_n e^{j2\pi n t/T} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi n t/T} dt \right)}_{=T c_n} e^{j2\pi n t/T}. \end{aligned}$$

Der Term in der Klammer wird für $T \rightarrow \infty$ und mit der Einführung der kontinuierlichen Variable $s = n/T$ zu $\hat{f}(s)$ (siehe 3.1). Somit wird der obige Ausdruck für $f(t)$ zu einer Riemannschen Summe für das Integral der Funktion $\hat{f}(s)e^{j2\pi s t}$ von $-\infty$ bis ∞ . Der Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ führt dann auf

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{j2\pi s t} ds.$$

3.4.2. *Definition inverse Fouriertransformation.* Wir definieren die inverse Fouriertransformation einer Funktion $g(s)$ durch

$$\check{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{j2\pi s t} ds.$$

Durch diese Transformation lässt sich eine Funktion $f(t)$ aus ihrer Fouriertransformierten $\hat{f}(s)$ zurückgewinnen:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{j2\pi s t} ds.$$

Bemerkungen:

- (i) Insbesondere gilt

$$\check{\check{f}} = f.$$

- (ii) Die inverse Fouriertransformation unterscheidet sich von der Fouriertransformation nur um ein Minuszeichen im Exponenten von $e^{j2\pi s t}$.
- (iii) Wir nehmen an dass die Funktionen in Abhängigkeit der Zeit, i.e. $f(t)$, reell sind. Jedoch (siehe zum Beispiel die Aufgabe zum abgeschnittenen Sinus) ist die Fouriertransformierte, i.e. $\hat{f}(s)$, im allgemeinen eine Funktion mit Werten in den komplexen Zahlen (in Abhängigkeit der reellen Variable s (dies ist die Frequenz)).

3.5. Eigenschaften der Fouriertransformation.

3.5.1. *Linearität.* Es gilt

$$\widehat{(f+g)}(s) = \hat{f}(s) + \hat{g}(s), \quad \widehat{(\lambda f)}(s) = \lambda \hat{f}(s),$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese Eigenschaften folgen direkt aus der Linearität des Integrals.

3.5.2. Verschiebungen.

(i) Zeitbereich:

$$\text{Sei } g(t) = f(t - a), \text{ es gilt: } \hat{g}(s) = e^{-j2\pi as} \hat{f}(s)$$

(ii) Frequenzbereich:

$$\text{Sei } g(s) = f(s - a), \text{ es gilt: } \check{g}(t) = e^{j2\pi at} \check{f}(t).$$

I.e. Verschiebungen in einem Bereich ergeben Phasen im anderen Bereich.

Wir zeigen die erste dieser Eigenschaften. Der Beweis basiert auf der Substitution $u = t - a$:

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{-j2\pi st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j2\pi s(u+a)} du = e^{-j2\pi as} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j2\pi su} du = e^{-j2\pi as} \hat{f}(s). \end{aligned}$$

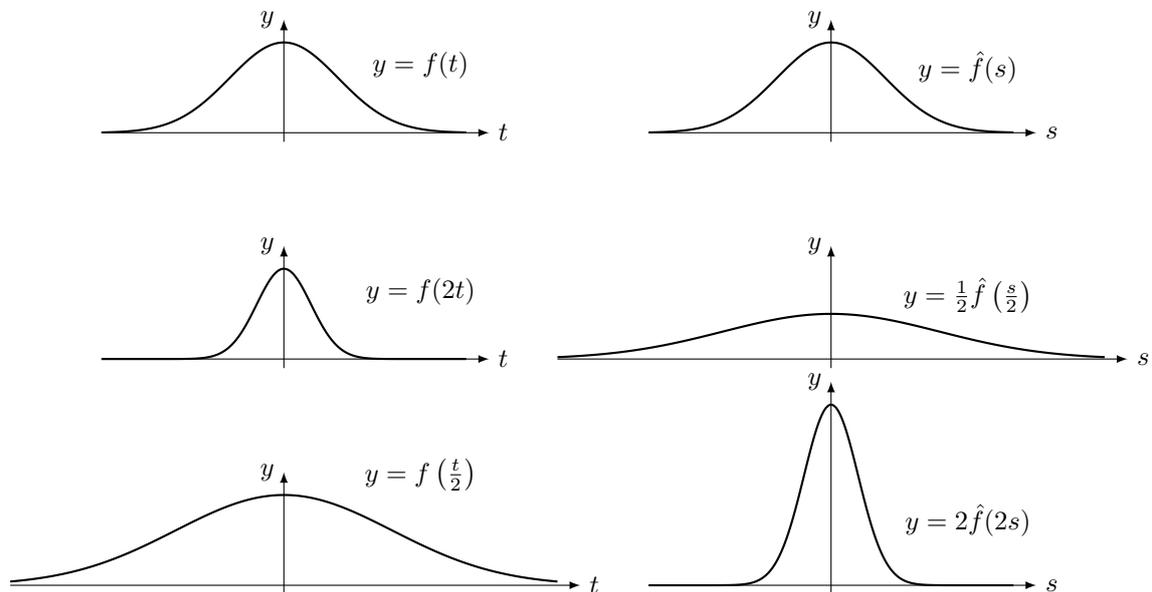
3.5.3. Streckung/Stauchung. Sei $a > 0$ und

$$\text{sei } g(t) = f(at), \text{ es gilt: } \hat{g}(s) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right).$$

Für den Beweis siehe die Aufgaben.

Wir haben diese Eigenschaft bereits in den Beispielen des Knalls und des abgeschnittenen Kosinus gesehen: Die Breite des Spektrums ist jeweils reziprok zur Knalldauer respektive reziprok zur Dauer des abgeschnittenen Kosinus.

Wir geben eine weitere Illustration dieser Eigenschaft an Hand der Transformation der Gaußschen Glockenkurve mit den Werten $a = 2$ und $a = \frac{1}{2}$:



3.5.4. Dualität. Es gilt

$$\hat{f}(-s) = \check{f}(s), \quad \check{f}(-t) = \hat{f}(t).$$

I.e. die Fouriertransformation einer Funktion ist gleich der inversen Fouriertransformation dieser Funktion, bis auf ein Vorzeichen beim Argument.

Beweis der ersten Eigenschaft:

$$\hat{f}(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi(-s)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j2\pi st} dt = \check{f}(s).$$

Die zweite Eigenschaft ist die erste wenn man $t = -s$ setzt.

Als Anwendung bestimmen wir die Transformation der sinc-Funktion, i.e. wir suchen $\widehat{\text{sinc}}(s)$. Wir wissen dass (siehe 3.3.1 Seite 43)

$$\hat{\Pi} = \text{sinc}.$$

Darauf die inverse Fouriertransformation angewendet ergibt

$$\Pi = \widetilde{\text{sinc}}.$$

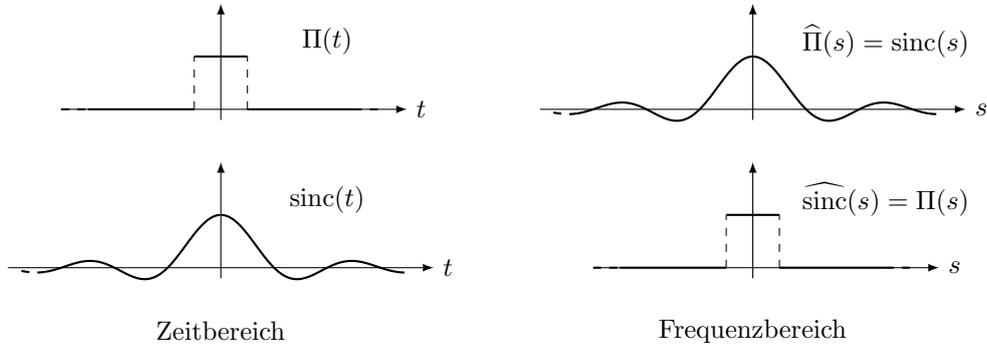
Mit Dualität und dieser Gleichung haben wir

$$\widehat{\text{sinc}}(t) = \widetilde{\text{sinc}}(-t) = \Pi(-t).$$

Da aber $\Pi(-t) = \Pi(t)$ (gerade Funktion), erhalten wir das Resultat:

$$\widehat{\text{sinc}} = \Pi.$$

Wir stellen diese Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich dar:



3.5.5. Parität.

(i) Gerade:

$$\text{Sei } f(-t) = f(t), \quad \text{es gilt } \hat{f}(-s) = \hat{f}(s) \text{ und } \hat{f}(s) \in \mathbb{R}.$$

(ii) Ungerade:

$$\text{Sei } f(-t) = -f(t), \quad \text{es gilt } \hat{f}(-s) = -\hat{f}(s) \text{ und } \hat{f}(s) \in j\mathbb{R},$$

wobei wir mit $j\mathbb{R}$ die rein imaginären Zahlen bezeichnen. I.e. gerade Funktionen werden auf gerade Funktionen transformiert und ungerade Funktionen werden auf ungerade Funktionen transformiert. Für gerade und ungerade Funktionen ist die Fouriertransformierte reell.

Beweis der ersten Paritätseigenschaft:

$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j2\pi st} dt + \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-j2\pi st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-j2\pi st} dt - \int_{\infty}^0 \underbrace{f(-u)}_{=f(u)} e^{j2\pi su} du \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-j2\pi st} dt + \int_0^{\infty} f(u)e^{j2\pi su} du \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \left(e^{-j2\pi st} + e^{j2\pi st} \right) dt = \int_0^{\infty} 2f(t) \cos(2\pi st) dt, \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile die Substitution $u = -t$ verwendet haben und für die dritte Zeile die Integralgrenzen vertauscht haben (jeweils für das zweite Integral). I.e. wir finden

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty 2f(t) \cos(2\pi st) dt.$$

Daraus folgt nun $\hat{f}(s) \in \mathbb{R}$ (da Integral einer reellen Funktion) und

$$\hat{f}(-s) = \int_0^\infty 2f(t) \cos(2\pi(-s)t) dt = \int_0^\infty 2f(t) \cos(2\pi st) dt = \hat{f}(s),$$

da Kosinus eine gerade Funktion ist.

3.6. Fourierkosinustransformation und Anwendung auf Spektroskopie.

3.6.1. *Fourierkosinustransformation.* Wir betrachten eine Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wir definieren die gerade Erweiterung von f als

$$f_g(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0, \\ f(-t) & t < 0. \end{cases}$$

Die Fouriertransformation dieser geraden Erweiterung heisst *Fourier-Kosinustransformation* der Funktion $f(t)$. Aus dem Beweis der ersten Paritätseigenschaft für gerade Funktionen (siehe Seite 49) wissen wir dass die Fouriertransformation von $f_g(t)$ geschrieben werden kann als

$$\hat{f}_g(s) = \int_0^\infty 2f_g(t) \cos(2\pi st) dt = \int_0^\infty 2f(t) \cos(2\pi st) dt$$

Die zweite Gleichung folgt, da für $t \in [0, \infty)$ gilt: $f_g(t) = f(t)$. I.e. wir finden dass die Fourier-Kosinustransformation gegeben ist als

$$\hat{f}_K(s) = \int_0^\infty 2f(t) \cos(2\pi st) dt$$

Nun betrachten wir die Inverse. Wir wissen dass $\hat{f}_g(s)$ eine gerade Funktion ist, da $f_g(t)$ eine gerade Funktion ist. Die Fouriertransformation von $\hat{f}_g(s)$ (dies ist dann $\hat{\hat{f}}_g(t)$) lässt sich somit schreiben als

$$\hat{\hat{f}}_g(t) = \int_0^\infty 2\hat{f}_g(s) \cos(2\pi st) ds.$$

Nun verwenden wir die Dualitätseigenschaft $\check{g}(t) = \hat{g}(-t)$ mit $g = \hat{f}_g$:

$$\check{\hat{f}}_g(t) = \hat{\hat{f}}_g(-t).$$

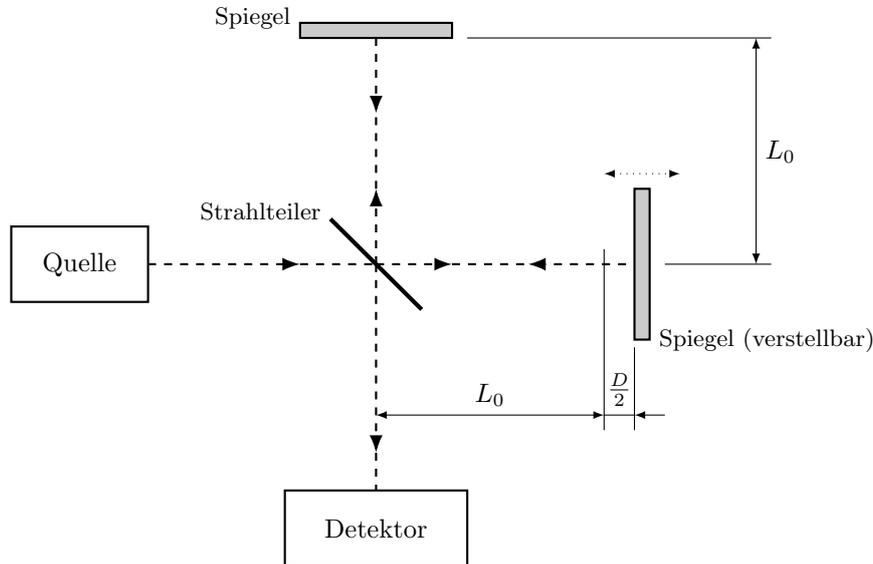
Die linke Seite ist gleich $f_g(t)$. Für die rechte Seite verwenden wir den obigen Integralausdruck. Wir erhalten

$$f_g(t) = \int_0^\infty 2\hat{f}_g(s) \cos(2\pi s(-t)) ds = \int_0^\infty 2\hat{f}_K(s) \cos(2\pi st) ds.$$

I.e. für $t \in [0, \infty)$ finden wir die inverse Fourier-Kosinustransformation:

$$f(t) = \int_0^\infty 2\hat{f}_K(s) \cos(2\pi st) ds.$$

3.6.2. *Anwendung Fourierspektroskopie.* Von einer Strahlungsquelle soll die Intensitätsverteilung in Abhängigkeit der Frequenz bestimmt werden. Dazu wird das folgende Michelson-Interferometer verwendet:



Im Detektor gemessen wird die Intensität I des eintreffenden Lichtes in Abhängigkeit der Spiegelposition $D \geq 0$. I.e. die Funktion $I(D)$.

In einem ersten Schritt nehmen wir an die Quelle sei monochromatisch, i.e. das ausgestrahlte Licht bestehe aus nur einer Frequenz ω . Zwischen der Quelle und dem Strahlteiler kann das Licht beschrieben werden durch $A \cos(kx - \omega t)$, wobei wir mit A die Amplitude, mit k den Wellenvektor, mit x den zurückgelegten Weg und mit t die Zeit bezeichnen. Wir verwenden im folgenden die komplexe Schreibweise

$$Ae^{j(kx - \omega t)}.$$

Die Intensität einer Welle ist proportional zum Quadrat der Amplitude, i.e. die Intensität der monochromatischen Quelle ist A^2 . Wird diese Welle nun am Strahlteiler geteilt, an den Spiegeln reflektiert und beim Strahlteiler wieder überlagert, so treffen im Detektor die beiden folgenden Anteile ein:

$$\frac{1}{2}Ae^{j(kx - \omega t)} + \frac{1}{2}Ae^{j(k(x+D) - \omega t)}.$$

Der erste Term entspricht dem Anteil, welcher am oberen Spiegel reflektiert wird. Der zweite Term entspricht dem Anteil, welcher am rechten Spiegel reflektiert wird. Die beiden Anteile unterscheiden sich durch die Wegdifferenz D welche zweimal der Auslenkung des rechten Spiegels aus der Nulllage entspricht. Wir schreiben dies um als

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Ae^{j(kx - \omega t)} + \frac{1}{2}Ae^{j(k(x+D) - \omega t)} &= \frac{1}{2}Ae^{j(kx - \omega t)} (1 + e^{jkD}) \\ &= \frac{1}{2}Ae^{j(kx - \omega t)} e^{\frac{jkD}{2}} \left(e^{-\frac{jkD}{2}} + e^{\frac{jkD}{2}} \right) \\ &= A \cos\left(\frac{kD}{2}\right) e^{j(kx - \omega t + \frac{kD}{2})} \end{aligned}$$

wobei wir für die dritte Zeile die Euleridentität verwendet haben. Was im Detektor eintrifft ist eine Welle mit Amplitude $A \cos\left(\frac{kD}{2}\right)$ und Phasenverschiebung $e^{j\frac{kD}{2}}$. Die

Intensität welche im Detektor gemessen wird ist somit

$$\begin{aligned}\text{Gemessene Intensität} &= A^2 \cos^2\left(\frac{kD}{2}\right) \\ &= \frac{A^2}{2} \left(1 + \cos(kD)\right),\end{aligned}$$

wobei wir die trigonometrische Identität $\cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$ verwendet haben. Wir sehen dass Interferenz auftritt. Wir verwenden

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

(λ ist die Wellenlänge und σ ist die Frequenz (wir setzen die Lichtgeschwindigkeit gleich Eins)) und schreiben dies als

$$\text{Gemessene Intensität} = \frac{A^2}{2} \left(1 + \cos(2\pi D\sigma)\right).$$

Dieser Ausdruck ist die im Detektor gemessene Intensität einer monochromatischen Quelle mit Frequenz σ und Quellenintensität A^2 in Abhängigkeit der Spiegelposition D .

Sei nun $B(\sigma)$ die (unbekannte) Intensitätsverteilung der Quelle in Abhängigkeit von σ . Das bedeutet dass $B(\sigma)d\sigma$ die Intensität der Quelle im infinitesimalen σ -Intervall $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ ist und $\int_0^\infty B(\sigma)d\sigma$ die totale Intensität der Quelle. Nach der obigen Formel für die gemessene Intensität einer monochromatischen Quelle ist somit die im Detektor gemessene Intensität im infinitesimalen σ -Intervall $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ gegeben durch

$$I(\sigma)d\sigma = \frac{B(\sigma)}{2} \left(1 + \cos(2\pi D\sigma)\right) d\sigma$$

und die totale, im Detektor gemessene Intensität, in Abhängigkeit der Spiegelstellung D gegeben durch die Aufsummierung dieser Intensitäten, i.e. durch

$$\begin{aligned}I(D) &= \int_0^\infty \frac{B(\sigma)}{2} \left(1 + \cos(2\pi D\sigma)\right) d\sigma \\ &= \int_0^\infty \frac{B(\sigma)}{2} d\sigma + \int_0^\infty \frac{B(\sigma)}{2} \cos(2\pi D\sigma) d\sigma.\end{aligned}$$

Der erste Term der rechten Seite (ohne den Faktor $\frac{1}{2}$) ist die totale Intensität der Quelle. Wird die Spiegelstellung auf $D = 0$ gesetzt, so ist der Kosinus im zweiten Term gleich Eins und man misst die Intensität

$$I(0) = \int_0^\infty B(\sigma) d\sigma.$$

Mit dieser Erkenntnis schreiben wir den obigen Ausdruck für die gemessene Intensität als

$$I(D) = \frac{1}{2}I(0) + \int_0^\infty \frac{B(\sigma)}{2} \cos(2\pi D\sigma) d\sigma.$$

Wir stellen dies um auf

$$2I(D) - I(0) = \int_0^\infty B(\sigma) \cos(2\pi D\sigma) d\sigma.$$

In dieser Gleichung ist $I(D)$ die im Detektor gemessene Intensität in Abhängigkeit der Spiegelstellung (i.e. D wird variiert und die Intensität gemessen). $I(0)$ ist bekannt aus der gemessenen Intensität bei Spiegelstellung $D = 0$. Die Funktion $B(\sigma)$ ist die unbekannte Intensitätsverteilung der Quelle. Wir sehen nun dass der Term auf der rechten Seite

der Fourier-Kosinustransformation dieser Funktion entspricht! Wir verwenden den Ausdruck für die inverse Fourier-Kosinustransformation (siehe vorhergehenden Abschnitt) und bekommen

$$B(\sigma) = \int_0^{\infty} (2I(D) - I(0)) \cos(2\pi\sigma D) dD.$$

Diese Gleichung gibt die Intensitätsverteilung $B(\sigma)$ in Abhängigkeit der gemessenen Intensität $I(D)$. Sie ist die fundamentale Gleichung der Fouriertransformationsspektroskopie.

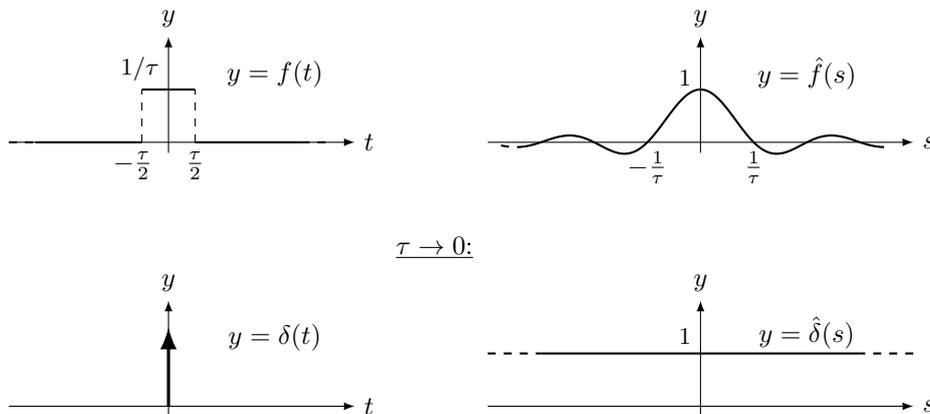
3.7. Fouriertransformation von Deltafunktionen. Wir erinnern uns an die fundamentale Eigenschaft der Deltafunktion: Für eine Funktion $f(t)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0).$$

Aus dieser Eigenschaft folgt die Fouriertransformation der Deltafunktion:

$$\hat{\delta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi st} dt = e^{-j2\pi s0} = 1.$$

Bemerkung: Dieses Ergebnis stimmt mit der Intuition überein wenn man sich einen Knall im Grenzwert von infinitesimaler Dauer und unendlicher Lautstärke vorstellt, so dass das Produkt von Dauer und Lautstärke konstant gehalten wird. Für einen Knall mit Dauer τ und Lautstärke $1/\tau$ wird die Funktion welche den Knall beschreibt für $\tau \rightarrow 0$ zur Deltafunktion. Die Fouriertransformation dieses Knalls wird durch die sinc-Funktion beschrieben, welche ihren ersten Nulldurchgang bei $s = 1/\tau$ besitzt. Im Grenzwert $\tau \rightarrow 0$ verschiebt sich dieser Nulldurchgang nach ∞ und die Funktion wird zur Konstanten Funktion mit Wert Eins:



Hier und im folgenden stellen wir den Graphen der Deltafunktion mit einem Pfeil dar.

3.7.1. *Verschobene Deltafunktion.* Sei

$$f(t) = \delta(t - t_0).$$

Wir haben

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j2\pi st} dt = e^{-j2\pi st_0}.$$

Bemerkung: Es gilt $|\hat{f}(s)| = 1$.

3.7.2. *Summe von Deltafunktionen.* Sei

$$f(t) = \sum_i \delta(t - t_i).$$

Wir haben

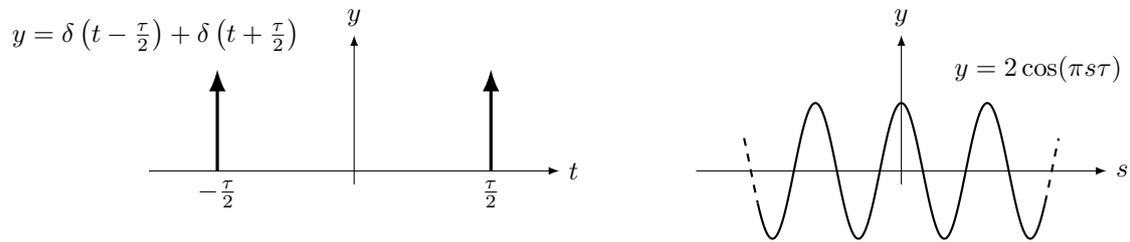
$$\hat{f}(s) = \sum_i e^{-j2\pi s t_i}.$$

Beispiel: Sei

$$f(t) = \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right).$$

Es folgt

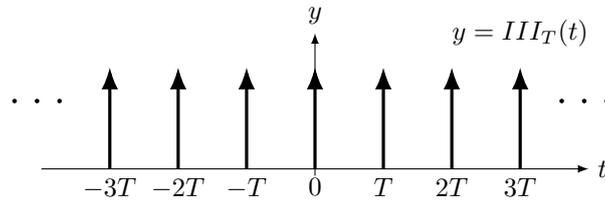
$$\hat{f}(s) = e^{-j\pi s \tau} + e^{j\pi s \tau} = 2 \cos(\pi s \tau).$$



3.7.3. *Dirac-Kamm.* Sei

$$III_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT).$$

Diese Funktion heisst *Dirac-Kamm* der Periode T .



Es handelt sich beim Dirac-Kamm um eine T -periodische Funktion. Somit lässt sie sich als Fourierreihe schreiben. Die dazugehörigen Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} III_T(t) e^{-jn2\pi t/T} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn2\pi t/T} dt = \frac{1}{T} e^{-jn2\pi 0/T} = \frac{1}{T}$$

und die Fourierreihe für den Dirac-Kamm ist dann

$$III_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn2\pi t/T} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi t/T}.$$

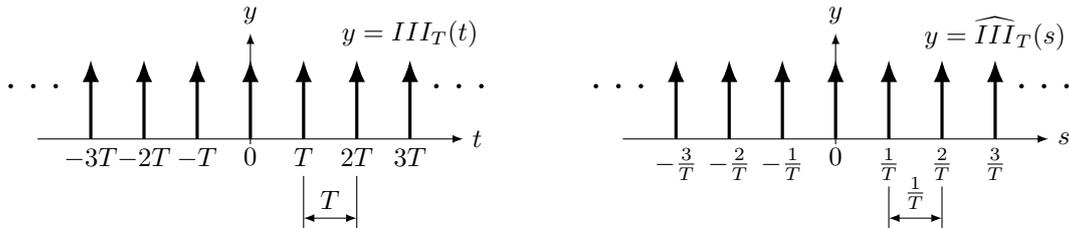
Die Fouriertransformation des Dirac-Kamm ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \widehat{III}_T(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} III_T(t) e^{-j2\pi s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT) e^{-j2\pi s t} dt \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - iT) e^{-j2\pi s t} dt \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi siT}.$$

Vergleichen wir dies mit dem obigen Ausdruck des Dirac-Kamms $III_T(t)$, geschrieben als Fourierreihe, so sehen wir dass die Fouriertransformation des Dirac-Kamms wieder von der Form eines Dirac-Kamms ist. Genauer gilt das wichtige Resultat

$$\widehat{III}_T(s) = \frac{1}{T} III_{\frac{1}{T}}(s).$$



3.8. Faltung mit Deltafunktionen, Transmissionsfunktion. Die Faltung der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist definiert als

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x - x')dx'.$$

Sie besitzt die Eigenschaft (ohne Beweis):

$$\text{Sei } h(x) = (f * g)(x), \text{ dann gilt } \hat{h}(s) = \hat{f}(s)\hat{g}(s).$$

3.8.1. Faltung mit Deltafunktionen. Im folgenden werden wir die Faltung nur mit Deltafunktionen verwenden.

Wir illustrieren an einem Beispiel: Seien

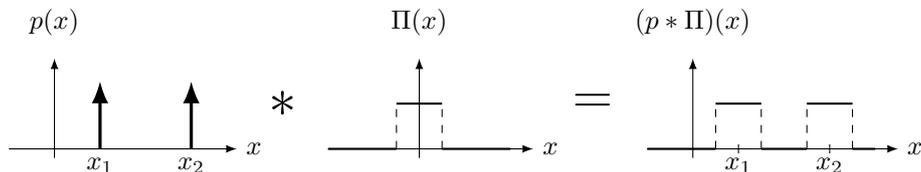
$$p(x) = \delta(x - x_1) + \delta(x - x_2),$$

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} (p * \Pi)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x')\Pi(x - x')dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - x_1)\Pi(x - x')dx' + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - x_2)\Pi(x - x')dx' \\ &= \Pi(x - x_1) + \Pi(x - x_2). \end{aligned}$$

Schematisch dargestellt:



3.8.2. Transmissionsfunktion. Optische Öffnungen werden beschrieben durch ihre *Transmissionsfunktion*. Diese Funktion beschreibt die Durchlässigkeit für Wellen in Abhängigkeit des Ortes. Ihre Werte liegen zwischen Null (nicht durchlässig) und Eins (voll durchlässig). Wir betrachten eindimensionale Probleme, i.e. die Transmissionsfunktion hängt nur von x ab.

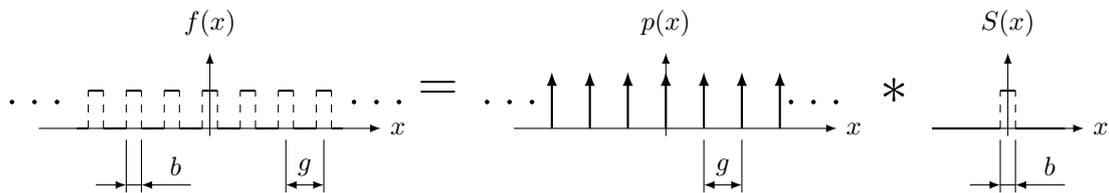
Beispiele:

- (i) Für eine Wand mit einem Spalt zwischen $x = -1/2$ und $x = 1/2$, ist die Transmissionsfunktion $f(x) = \Pi(x)$ (die x -Achse liegt in der Wand und senkrecht zum Spalt).
- (ii) Periodische Öffnung: *Optisches Gitter*. Die Gitterabstände seien g und die Spaltbreite sei b . Die Transmissionsfunktion $f(x)$ kann als Faltung der Gitterpositionen $p(x)$ mit dem Einzelspalt $S(x)$ geschrieben werden:

$$f(x) = (p * S)(x), \quad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - ig),$$

$$S(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schematisch dargestellt:



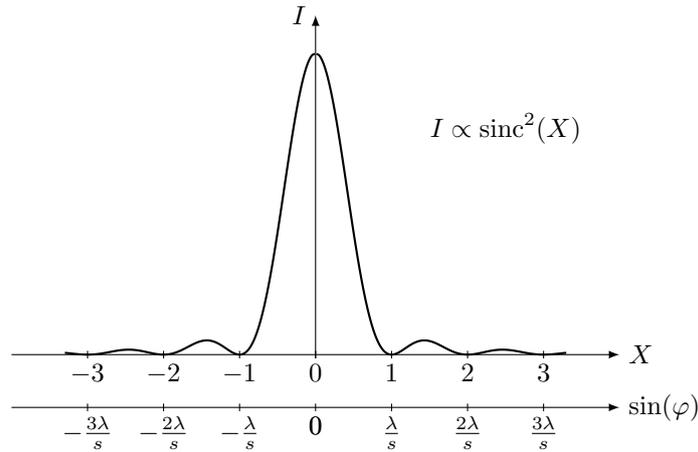
3.9. Beugung am Spalt in der Fraunhoferschen Näherung.

3.9.1. *Physikalische Situation*. Eine ebene Welle trifft senkrecht auf eine Blende, die einen Spalt der Breite s aufweist. Wir interessieren uns für die Erregung (i.e. die Amplitude) im Unendlichen in Abhängigkeit des Winkels φ zur Horizontalen (Fraunhofersche Näherung).

Nach dem Huygenschen Prinzip kann das Wellenfeld hinter dem Spalt aufgefasst werden als Superposition von unendlich vielen Huygenschen Elementarwellen, die von jedem infinitesimalen Element des Spaltes ausgehen. Im unendlich Fernen sind die im Detektor eintreffenden Strahlen alle parallel, i.e. nur parallele Strahlen (alle unter dem Winkel φ) müssen für die Intensität im Unendlichen berücksichtigt werden.

Statt im Unendlichen zu messen, stellt man den Detektor im Brennpunkt F einer Linse auf. Da die Phasenbeziehung zwischen den parallelen Teilwellen, die ohne Linse erst im unendlich Fernen interferieren würden, durch die Linse nicht verändert wird, erhält man auf diese Weise dieselbe Winkelabhängigkeit der Intensität wie mit dem Detektor im unendlich Fernen.

3.9.2. *Analyse der Beugung*. Eine ebene Welle, deren Wellenfront parallel ist zur Spaltebene, trifft auf den Spalt. Wir beschreiben diese Welle durch $Be^{j(kx - \omega t)}$, wobei wir mit x den zurückgelegten Weg der Welle beschreiben. Die Auslenkung ist in der Spaltebene für jedes infinitesimale Spaltelement gleich, zum Beispiel $Be^{-j\omega t}$ (i.e. wir setzen in der Spaltebene $x = 0$).

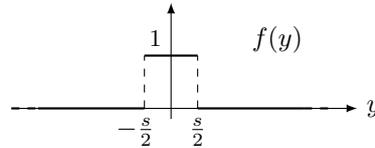


Die Nullstellen sind bei $X = n$, i.e. bei $\frac{s}{\lambda} \sin(\varphi) = n$, i.e. bei $\sin(\varphi) = \frac{\lambda n}{s}$. Der Winkel φ liegt im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$, somit ist die Abszisse in der obigen Grafik begrenzt durch $|\sin(\varphi)| \leq 1$, i.e. nur dieser Teil ist beobachtbar. Je nach Wellenlänge λ und Spaltbreite s gilt:

- (i) Falls $\lambda \ll s$, so sind viele Nebenmaxima beobachtbar,
- (ii) Falls $\lambda \gg s$, so ist die Intensität nahezu winkelunabhängig.

Der zweite Fall entspricht einer einzelnen Huygenschen Elementarwelle.

3.9.3. *Zusammenhang zur Fouriertransformation.* Die Transmissionsfunktion des Spaltes ist



Die dazugehörige Fouriertransformation ist

$$\hat{f}(u) = s \operatorname{sinc}(us).$$

Vergleichen wir dies mit

$$E = G \operatorname{sinc}(X),$$

wobei $X = \frac{s}{\lambda} \sin(\varphi)$, so sehen wir dass mit $u = \frac{\sin(\varphi)}{\lambda}$ das folgende Resultat folgt:

Die Abhängigkeit der Beugungsamplitude von $\frac{\sin(\varphi)}{\lambda}$ ist die Fouriertransformierte der Transmissionsfunktion des Spaltes, i.e.

$$E = C \hat{f}\left(\frac{\sin(\varphi)}{\lambda}\right).$$

(bis auf eine Konstante C). Dieses zentrale Resultat der Optik gilt für beliebige Spaltanordnungen und auch in höheren Dimensionen.

3.9.4. *Approximation für kleine Winkel.* Wir bezeichnen im folgenden mit z den horizontalen Abstand der Detektorebene zur Blendenebene und mit x_1 den vertikalen Abstand des Detektors zur Horizontalen. Sei

$$\xi = \frac{x_1}{z\lambda}.$$

Für kleine Winkel φ gilt

$$\sin(\varphi) \approx \frac{x_1}{z} = \xi\lambda.$$

Somit haben wir

$$\frac{\sin(\varphi)}{\lambda} = \xi$$

und das obige Resultat wird zu

$$E(\xi) = C \hat{f}(\xi) = C \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-j2\pi\xi y} dy.$$

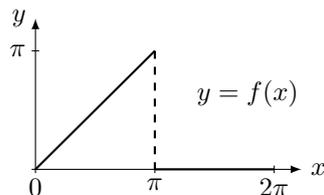
AUFGABE 6

Man bestimme durch elementare Rechnung die Fourierreihe der 2π -periodischen Funktion $f(x)$, gegeben durch

$$f(x) = x \quad \text{für} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

AUFGABE 7

Sei $f(x)$ die 2π -periodische Funktion, welche für $x \in [0, 2\pi)$ durch folgenden Graphen gegeben ist:



Man bestimme die Fourierreihe von $f(x)$ und schreibe diese auf, bis und mit den Termen welche die fünffache Grundfrequenz beinhalten.

AUFGABE 8

Sei $f(t)$ eine $T = 4$ -periodische Funktion mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -2 < t \leq -1, \\ k & -1 < t \leq 1, \\ 0 & 1 < t \leq 2, \end{cases}$$

wobei $k > 0$ eine Konstante ist.

- (i) Man finde ω .
- (ii) Man skizziere den Graphen $y = f(t)$.
- (iii) Man finde die Fourierreihe von $f(t)$.

AUFGABE 9

Man benutze die Fourierreihe der Dreiecksfunktion und bestimme damit die Fourierreihe der $T = 2$ -periodischen Funktion $f(t)$, gegeben durch $f(t) = 3|t|$ für $-1 \leq t \leq 1$.

AUFGABE 10

Man benutze die Fourierreihe der Dreiecksfunktion und bestimme damit die Fourierreihe der $2L$ -periodischen Funktion $f(t)$, gegeben durch:

$$f(t) = \begin{cases} L + t & -L \leq t < 0, \\ L - t & 0 \leq t < L. \end{cases}$$

AUFGABE 11

Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = 3 + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 2 \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) - 17 \sin(2\pi t).$$

- (i) Man bestimme die Grundperiode der Funktion $f(t)$.
- (ii) Man bestimme die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(t)$.

AUFGABE 12

- (i) Es gilt

$$\sin(\omega t + \varphi) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t).$$

Man finde Ausdrücke für A , B in Abhängigkeit von φ . Hinweis: Man setze spezielle Werte von t in der obigen Gleichung ein.

- (ii) Man verwende die Fourierreihe der Rechtecksfunktion und bestimme daraus, unter Verwendung von (i), die Fourierreihe der 2π -periodischen und geraden Funktion $f(x)$ mit der Eigenschaft

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ -1 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$$

- (iii) Seien a_0 , a_n , b_n die Fourierkoeffizienten einer 2π -periodischen Funktion $f(x)$. Man finde die Fourierkoeffizienten der Funktion $g(x) = f(x + c)$. Hinweis: Für die auftretenden Verschiebungen in den Kosinustermen bestimme man die Konstanten C und D in

$$\cos(x + \varphi) = C \sin(x) + D \cos(x),$$

(dies ist analog zu Teilaufgabe (i)).

AUFGABE 13

Man zeige:

- (i) Das Produkt zweier geraden Funktionen ist eine gerade Funktion.
- (ii) Das Produkt zweier ungeraden Funktionen ist eine gerade Funktion.
- (iii) Das Produkt einer geraden und ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

AUFGABE 14

- (i) Man zeige dass jede Funktion $f(x)$ als eine Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion geschrieben werden kann. Hinweis: Man betrachte die Funktionen $f(x) + f(-x)$ und $f(x) - f(-x)$.
- (ii) Man schreibe die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in dieser Form.
- (iii) Man finde alle Funktionen, die sowohl gerade als auch ungerade sind.

AUFGABE 15

Sei $f(t)$ eine gerade, T -periodische Funktion und sei C eine Konstante. Man zeige dass in der Fourierreihe der Funktion $f(t) + C$ die Koeffizienten b_n verschwinden.

AUFGABE 16

Wir betrachten die Funktion $f(t) = 1$ für $0 \leq t < \pi$.

- (i) Man bestimme die Fourier-Sinusreihe von $f(t)$.
- (ii) Man bestimme die Fourier-Kosinusreihe von $f(t)$.

AUFGABE 17

Man finde die Fourier-Kosinusreihe für

$$f(x) = L - x, \quad \text{für } 0 \leq x \leq L,$$

wobei $L > 0$ eine Konstante ist.

AUFGABE 18

Sei $f(t) = 4 - t^2$ für $t \in [0, 2]$. Man finde die Fourier-Kosinusreihe dieser Funktion. Hinweis:

$$\int t^2 \cos(at) dt = \frac{2at \cos(at) + (a^2 t^2 - 2) \sin(at)}{a^3} + C,$$

wobei a und C Konstanten sind.

AUFGABE 19

Seien l und C zwei Konstanten und sei

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2C}{l}t & 0 \leq t < l/2 \\ \frac{2C}{l}(l-t) & l/2 \leq t < l \end{cases}$$

Man skizziere die gerade und ungerade Erweiterung dieser Funktion und schreibe die Gleichungen für die Koeffizienten der dazugehörigen Fourierreihen auf.

AUFGABE 20

Sei $f(x) = \sin(x)$ für $x \in [0, \pi)$.

- (i) Man bestimme die Fourier-Sinusreihe von $f(x)$.
- (ii) Man bestimme die Fourier-Kosinusreihe von $f(x)$. Hinweis:

$$\int_0^\pi \sin(x) \cos(nx) dx = \frac{1 + \cos(n\pi)}{1 - n^2}.$$

AUFGABE 21

Man bestimme die komplexen Fourierkoeffizienten für die 2π -periodische Funktion $f(t) = t$ für $t \in -\pi \leq t < \pi$.

AUFGABE 22

Man zeige dass die Koeffizienten der komplexen Darstellung der Fourierreihe einer ungeraden Funktion rein imaginär und die einer geraden Funktion reell sind.

AUFGABE 23

Die Fourierreihe lässt sich in den drei Formen

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \end{aligned}$$

schreiben.

- (i) Man finde einen Ausdruck für die Koeffizienten A_n in Abhängigkeit der Koeffizienten a_n, b_n .
- (ii) Man schreibe den gefundenen Ausdruck aus (i) in Abhängigkeit der Koeffizienten c_n , wobei c_n die Koeffizienten der Fourierreihe in komplexer Darstellung sind.

AUFGABE 24

Man führe die Fourierreihe in komplexer Darstellung

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

zurück auf die reelle Darstellung. Man schreibe dazu die Reihe folgendermassen um:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \dots = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \dots + c_{-n} \dots)$$

und verwende $c_{-n} = \overline{c_n}$, sowie

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2),$$

wobei z_1, z_2 zwei beliebige komplexe Zahlen sind.

AUFGABE 25

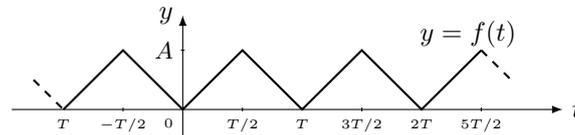
Sei $f(t)$ eine 4-periodische Funktion mit

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -2 \leq t < 0, \\ 1, & 0 \leq t < 2. \end{cases}$$

Man finde die Fourierreihe in komplexer Darstellung und leite daraus die Fourierreihe in reeller Darstellung her.

AUFGABE 26

Man benutze die Fourierreihe der Dreiecksfunktion und bestimme daraus die Fourierreihe und das Spektrum (mit Skizze) für die folgende Dreiecksfunktion



AUFGABE 27

Man bestimme und skizziere das Spektrum der Funktion

$$f(t) = 7 \sin(\omega t) - 11 \cos(3\omega t) + 2.$$

AUFGABE 28

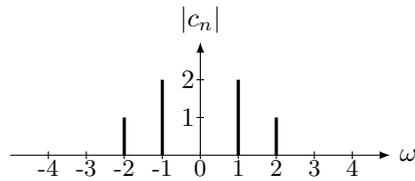
Man bestimme die komplexe Darstellung der Fourierreihe und das dazugehörige Spektrum (mit Skizze) der Funktion

$$f(t) = \sin^3(3\pi t).$$

Hinweis: Man schreibe die Sinusfunktion mit Hilfe der Euleridentitäten und entwickle danach zur dritten Potenz.

AUFGABE 29

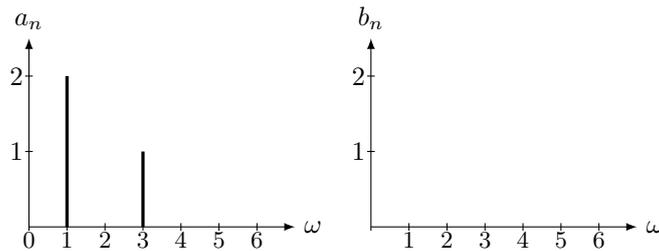
Gegeben ist das folgende Spektrum:



Man finde zu diesem Spektrum eine reelle π -periodische Funktion $f(t)$.

AUFGABE 30

Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion mit den folgenden Spektren für a_n, b_n :



Man skizziere die Spektren der untenstehenden Funktionen. Man verwende dazu in allen Skizzen auf der horizontalen Achse die selbe Skalierung, i.e. man skizziere bezüglich Vielfachen der Grundfrequenz $\omega = 2\pi/T$ der Funktion $f(t)$.

- | | | |
|---------------|-------------------------|-------------------|
| (i) $f(2t)$ | (iii) $f(t) + 1$ | (v) $f(t + T/2)$ |
| (ii) $f(t/2)$ | (iv) $-\frac{1}{2}f(t)$ | (vi) $f(t - T/4)$ |

AUFGABE 31

Sei $0 < \lambda < 1$. Wir betrachten die folgende 1-periodische Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t < \lambda, \\ 0 & \lambda \leq t < 1. \end{cases}$$

- (i) Man bestimme die reellen Fourierkoeffizienten von $f(t)$.
- (ii) Man bestimme den Wert von λ , für welchen der Mittelwert von $f(t)$ gleich 1.2 ist.
- (iii) Man bestimme den Wert von λ für welchen der quadratische Mittelwert von $f(t)$ gleich 1.2 ist.
- (iv) Man bestimme die komplexen Fourierkoeffizienten von $f(t)$.

AUFGABE 32

Eine Sinusspannung mit Frequenz $\nu = 1$ kHz und Amplitude von 5 V liegt an einem Widerstand von $R = 1 \Omega$.

- (i) Man bestimme die mittlere Leistung die an den Widerstand abgegeben wird.
Hinweis: $\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi$.
- (ii) Das Spannungssignal wird auf Rechteckform geändert:

$$U(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < T/2, \\ -5, & T/2 \leq t < T. \end{cases}$$

Man bestimme nun die mittlere Leistung.

- (iii) Man bestimme die Leistung der Fundamentalfrequenz (dies ist die Grundfrequenz). Hinweis: Man benutze Parseval und die Fourierreihe der Rechteckfunktion.
- (iv) Man drücke die Leistung aus (iii) durch den Fourierkoeffizienten c_1 aus.
- (v) Man bestimme den Anteil der Leistung der Fundamentalfrequenz an der gesamten Leistung.

AUFGABE 33

Man ordne den folgenden fünf Funktionen eine der untenstehenden Fourierreihen zu:

- F1 Fourier Reihe von: $f(x) = x$ für $x \in [-\pi, \pi)$,
- F2 Fourier Reihe von: $f(x) = \text{sign}(x)$ für $x \in [-\pi, \pi)$,
- F3 Fourier Sinusreihe von: $f(x) = 1$ für $x \in [0, 1)$,
- F4 Fourier Reihe von: $f(x) = x^2$ für $x \in [-\pi, \pi)$,
- F5 Fourier Reihe von: $f(x) = 1 - 2|x|$ für $x \in [-1, 1)$,

$$\text{S1} \quad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4 \cos(nx)}{n^2},$$

$$\text{S2} \quad f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{2n-1},$$

$$\text{S3} \quad f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1},$$

$$\text{S4} \quad f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi x)}{(2n-1)^2},$$

$$\text{S5} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx).$$

AUFGABE 34

Sei $f(t)$ eine 2π -periodische Funktion mit

$$f(t) = t, \quad \text{für } t \in [0, 2\pi).$$

Im folgenden bezeichnen wir mit $f_k(t)$ die Partialsumme welche aus den ersten k -Termen der Fourierreihe besteht.

- (i) Man bestimme $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\pi)$,
- (ii) Man bestimme $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(2\pi)$,
- (iii) Man skizziere qualitativ $f_{20}(t)$ und $f(t)$ im Intervall $[-\pi, 3\pi]$.

AUFGABE 35

Wir betrachten die Funktion $f(t)$, definiert auf dem Intervall $[0, 2\pi)$:

$$f(t) = \frac{t}{2} + \pi, \quad \text{für } t \in [0, 2\pi).$$

- (i) Sei $f_k(t)$ die Partialsumme bestehend aus den ersten k Termen der Fourier-Kosinusreihe von $f(t)$. Man skizziere qualitativ $f_{20}(t)$ für $t \in [-\pi, 3\pi]$ und bestimme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(2\pi).$$

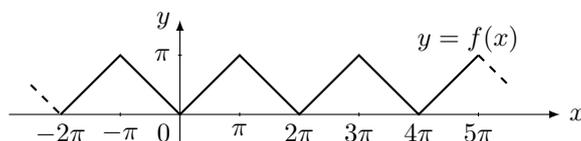
- (ii) Sei $f_k(t)$ die Partialsumme bestehend aus den ersten k Termen der Fourier-Sinusreihe von $f(t)$. Man skizziere qualitativ $f_{20}(t)$ für $t \in [-\pi, 3\pi]$ und bestimme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(2\pi).$$

AUFGABE 36

Wir betrachten die folgende Dreiecksfunktion mit dazugehöriger Fourierreihe:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$



Man skizziere $\frac{df}{dx}(x)$ und finde die dazugehörige Fourierreihe.

AUFGABE 37

Gegeben sei die Fourierreihe für die 2-periodische Funktion $p(t)$ mit $p(t) = t^2$ für $t \in [-1, 1)$:

$$p(t) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t).$$

Gesucht ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 9x(t) = f(t),$$

wobei $f(t)$ eine 2-periodische Funktion ist mit $f(t) = 2 - 2t^2$ für $t \in [-1, 1)$.

AUFGABE 38

Sei

$$f(t) = \sin(t) + \cos(2t).$$

- (i) Man bestimme die Fourierkoeffizienten c_n von $f(t)$ (Bei den Koeffizienten c_n handelt es sich um die Koeffizienten der komplexen Darstellung der Fourierreihe).
(ii) Sei $y(t)$ die stationäre Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) + 5y(t) = f(t).$$

Man bestimme die Fourierkoeffizienten d_n von $y(t)$ (Bei den Koeffizienten d_n handelt es sich um die Koeffizienten der komplexen Darstellung der Fourierreihe).

- (iii) Man bestimme die Fourierkoeffizienten der reellen Darstellung der Fourierreihe von $y(t)$.

AUFGABE 39

- (i) Man verwende die Fourierreihe der Rechteckfunktion $q(x)$ und bestimme damit die Fourierreihe der 4-periodischen Funktion $f(x)$, gegeben durch:

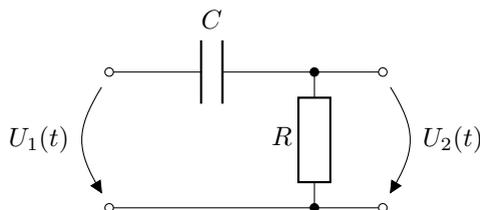
$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & 0 \leq x < 2, \\ 0 & 2 \leq x < 4. \end{cases}$$

- (ii) Man bestimme die Fourierreihe von $q(x)$ in komplexer Darstellung.
 (iii) Man bestimme eine stationäre Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 g}{dx^2}(x) + 4g(x) = q(x).$$

AUFGABE 40

Wir betrachten die folgende Schaltung eines Hochpassfilters:



- (i) Man zeige dass die Differentiagleichung

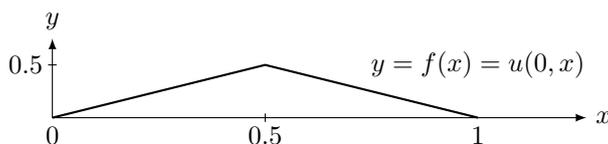
$$\dot{U}_2 + \frac{1}{RC}U_2 = \dot{U}_1$$

die Beziehung zwischen Eingangsspannung $U_1(t)$ und Ausgangsspannung $U_2(t)$ beschreibt.

- (ii) Im folgenden sei $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$ und die Eingangsspannung $U_1(t)$ sei eine periodische Spannung mit $U_1(t) = 1000t$ für $t \in [0, 0.001)$. Man schreibe $U_1(t)$ als Fourierreihe.
 (iii) Man bestimme die stationäre Ausgangsspannung $U_2(t)$ in Form einer Fourierreihe.

AUFGABE 41

Die Temperaturverteilung in einem Stab der Länge $L = 1$ zum Zeitpunkt $t = 0$ sei gegeben durch



Die Enden des Stabes werden auf Temperatur Null gesetzt, i.e. die Randbedingungen seien

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0.$$

- (i) Man finde die Temperatur im Stab für beliebige Zeit $t \geq 0$ und Ort $0 \leq x \leq 1$. Hinweis: Wie im entsprechenden Abschnitt im Skript gezeigt, ist die Lösung von der Form

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) \exp(-n^2\pi^2 a^2 t),$$

wobei die C_n noch zu bestimmen sind.

- (ii) Man bestimme den Wärmefluss bei $x = 0$ in Abhängigkeit der Zeit t . Hinweis: Der Wärmefluss q ist gegeben durch

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x},$$

wobei k eine Konstante ist (Wärmeleitfähigkeit).

AUFGABE 42

Wir betrachten eine Seite der Länge L welche an beiden Enden fixiert ist. Die Auslenkung $y(t, x)$ erfüllt die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

In dieser Gleichung ist a die (konstante) Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Die Fixierung an beiden Enden entspricht den Bedingungen $y(t, 0) = y(t, L) = 0$. Wir betrachten die Situation, in welcher die Seite zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgelenkt und dann losgelassen wird. Diese Situation entspricht den Bedingungen $y(0, x) = f(x)$ für eine gegebene Funktion $f(x)$ (die Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$) und $\frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = 0$.

- (i) Man setze den Ansatz $y(t, x) = T(t)X(x)$ in die Wellengleichung ein und finde damit gewöhnliche Differentialgleichungen für $T(t)$ und $X(x)$.
- (ii) Man bestimme die Randbedingungen für $X(x)$, welche sich aus den Bedingungen $y(t, 0) = y(t, L) = 0$ ergeben.
- (iii) Man bestimme die möglichen Lösungen der Gleichung für $X(x)$ mit Hilfe der Bedingungen in (ii).
- (iv) Man bestimme die Anfangsbedingung für $T(t)$, welche sich aus der Bedingung $\frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = 0$ ergibt.
- (v) Man bestimme die möglichen Lösungen der Gleichung für $T(t)$ mit Hilfe der Bedingung in (iv).
- (vi) Man verwende die gefundenen Lösungen in (iii) und (v) im Ansatz von (i) und bestimme dadurch die möglichen Lösungen der Wellengleichung.
- (vii) Man bestimme die Lösung der Wellengleichung, welche die Bedingung $y(0, x) = f(x)$ erfüllt.

AUFGABE 43

Man bestimme die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ e^{-at} & t > 0, \end{cases}$$

mit $a > 0$ einer Konstanten und skizziere das Leistungsspektrum $|\hat{f}(s)|^2$.

AUFGABE 44

Sei

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t) & -\tau \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\omega, \tau > 0$ Konstanten sind. Man bestimme die Fouriertransformation $\hat{f}(s)$ von $f(t)$ und skizziere $|\hat{f}(s)|^2$. Man kommentiere den Fall $\tau \rightarrow \infty$.

AUFGABE 45

Die Fouriertransformation erfüllt die folgende Verschiebungseigenschaft im Frequenzbereich:

$$\text{Sei } g(s) = f(s - a), \text{ es gilt: } \check{g}(t) = e^{j2\pi at} \check{f}(t).$$

Man beweise diese Eigenschaft.

AUFGABE 46

Man beweise die Streckungs-/Stauchungseigenschaft der Fouriertransformation: Sei $a > 0$ und sei $g(t) = f(at)$. Es gilt

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right).$$

AUFGABE 47

Man beweise die Dualitätseigenschaft

$$\check{\check{f}}(-t) = \hat{f}(t).$$

AUFGABE 48

Die Paritätseigenschaften der Fouriertransformation sind

(a) Gerade:

$$\text{Sei } f(-t) = f(t), \text{ es gilt } \hat{f}(-s) = \hat{f}(s) \text{ und } \hat{f}(s) \in \mathbb{R}.$$

(b) Ungerade:

$$\text{Sei } f(-t) = -f(t), \text{ es gilt } \hat{f}(-s) = -\hat{f}(s) \text{ und } \hat{f}(s) \in j\mathbb{R},$$

wobei wir mit $j\mathbb{R}$ die rein imaginären Zahlen bezeichnen.

Man skizziere jeweils ein Beispiel einer geraden und ungeraden Funktion $f(t)$ und ihrer Fouriertransformierten $\hat{f}(s)$.

AUFGABE 49

Die Eigenschaften der Fouriertransformation lassen sich in kommutativen Diagrammen darstellen. Beispielsweise die Streckung/Stauchung:

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{f}(s) \\ \downarrow t \rightarrow at & & \downarrow \\ f(at) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \end{array}$$

(i) Man stelle die Verschiebung im Zeitbereich in einem kommutativen Diagramm dar.

- (ii) Man verwende eine Kombination der Diagramme zu den Eigenschaften Streckung und Verschiebung im Zeitbereich und bestimme damit die Transformation von $f(at + b)$ ausgedrückt durch $\hat{f}(s)$.

AUFGABE 50

Sei

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

wobei σ eine Konstante ist. Man bestimme $\hat{f}(s)$. Hinweis: Für $g(t) = e^{-\pi t^2}$ gilt $\hat{g}(s) = e^{-\pi s^2}$.

AUFGABE 51

Sei

$$f(t) = \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

Man finde $\hat{f}(s)$.

5. LÖSUNGEN ZU DEN AUFGABEN

LÖSUNG 1

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} f(t + nT) &= f(t + (n - 1)T + T) \\ &= f(t + (n - 1)T) \\ &= \dots \\ &= f(t), \end{aligned}$$

wobei wir von der ersten auf die zweite Zeile verwendet haben dass $f(t+T) = f(t)$, aber mit $t + (n - 1)T$ in der Rolle von t .

LÖSUNG 2

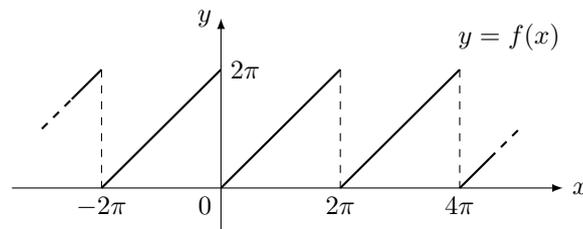
- (i) $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- (ii) Die Funktion $f_1(t) = \cos(\frac{2}{3}t)$ besitzt Grundperiode $T_1 = 3\pi$, die Funktion $f_2(t) = \sin(\frac{2}{5}t)$ besitzt Grundperiode $T_2 = 5\pi$. Die Grundperiode der Funktion $f_1(t) + f_2(t)$ ist das kleinste gemeinsame ganzzahlige Vielfache der beiden Grundperioden, i.e. $T = 15\pi$.
- (iii) Die konstante Funktion $f(t) = C$ ist periodisch da für beliebiges $T > 0$ gilt $f(t + T) = C = f(t)$. Jedoch gibt es somit kein kleinstes $T > 0$ und die Funktion $f(t) = C$ besitzt keine Grundperiode.
- (iv) Die Funktion $f_1(t) = \sin(2t)$ besitzt Grundperiode $T_1 = \pi$, die Funktion $f_2(t) = \sin(2\pi t)$ besitzt Grundperiode $T_2 = 1$. Jedoch gibt es kein gemeinsames ganzzahliges Vielfaches dieser beiden Grundperioden (würde dieses existieren, so müsste gelten $m \cdot T_1 = n \cdot T_2$ für $m, n \in \mathbb{N}$, i.e. $m \cdot \pi = n$. Daraus folgt aber $\pi = n/m$ was im Widerspruch zur Irrationalität von π steht). Somit besitzt die Funktion $f(t) = \sin(2t) + \sin(2\pi t)$ keine Grundperiode und ist somit nicht periodisch.

LÖSUNG 3

- (i) $f(x) = \cos(2\pi t - \frac{\pi}{2})$
- (ii) $f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}t + \pi\right) + \sqrt{\frac{3}{2}}$

LÖSUNG 4

- (i)



- (ii) Wir berechnen die Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi.$$

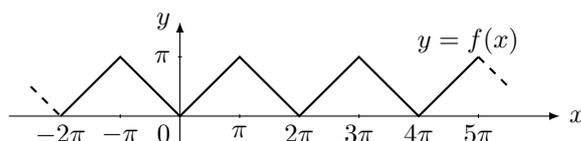
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) = 0, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right) = -\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Somit ist die Fourierreihe gegeben durch

$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} \right) \sin(nx).$$

LÖSUNG 5

(i)



(ii) Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten verwenden wir jeweils das Intervall $[-\pi, \pi]$, da die Funktion in diesem Intervall durch den einfachen Ausdruck

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

gegeben ist.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-x) dx + \int_0^{\pi} x dx \right) = \pi.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -x \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(nx)}{n} dx + \frac{x \sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) & n \text{ gerade} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -x \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{x \cos(nx)}{n} \right|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{\cos(nx)}{n} - \left. \frac{x \cos(nx)}{n} \right|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{\pi \cos(-n\pi)}{n} - \frac{\sin(nx)}{n^2} \right|_{-\pi}^0 - \frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + \left. \frac{\sin(nx)}{n^2} \right|_0^{\pi} \right) \\
&= \frac{1}{n} (\cos(-n\pi) - \cos(n\pi)) = 0,
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile verwendet haben dass $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi)$, da $\cos(x)$ eine gerade Funktion ist. Bemerkung: Die explizite Berechnung der b_n wäre nicht notwendig gewesen, da für $f(x)$ eine gerade Funktion die b_n a priori verschwinden.

Es ergibt sich die Fourierreihe

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \dots \right).$$

Diese lässt sich schreiben als

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x).$$

LÖSUNG 6

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

LÖSUNG 7

Die Fourierkoeffizienten sind

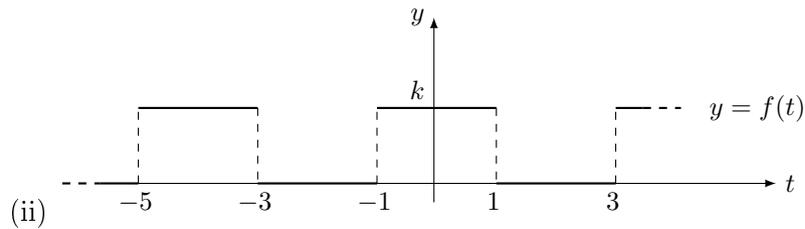
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \dots = \frac{1}{n^2 \pi} (\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade,} \\ -\frac{2}{n^2 \pi} & n \text{ ungerade.} \end{cases} \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \dots = -\frac{\cos(n\pi)}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos(x) - \frac{2}{9\pi} \cos(3x) - \frac{2}{25\pi} \cos(5x) \\
&\quad + \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots
\end{aligned}$$

LÖSUNG 8

(i) $\omega = \pi/2$.



(ii) Wir haben

$$a_0 = k, \quad a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade,} \\ \frac{2k}{n\pi} & n = 1, 5, 9, 13, \dots, \\ -\frac{2k}{n\pi} & n = 3, 7, 11, 15, \dots, \end{cases} \quad b_n = 0.$$

Somit ist die Fourierreihe

$$f(t) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{1}{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{1}{5} \cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right) - \frac{1}{7} \cos\left(\frac{7\pi}{2}t\right) + \dots \right)$$

LÖSUNG 9

$$f(t) = \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{\cos(n\pi t)}{n^2}.$$

LÖSUNG 10

$$f(t) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

LÖSUNG 11

- (i) $T = 4$
 (ii) $a_0 = 6$, $a_1 = \sqrt{2}$, $b_3 = -2$, $b_4 = -17$, alle anderen Koeffizienten sind gleich Null.

LÖSUNG 12

- (i) Einsetzen von $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ergibt

$$B = \sin(\varphi), \quad A = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos(\varphi).$$

- (ii) Es handelt sich bei $f(x)$ um eine um $\pi/2$ verschobene Rechtecksfunktion. Wir bezeichnen im folgenden die Rechtecksfunktion mit $q(x)$. Wir haben

$$f(x) = q\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{\sin(n(x + \frac{\pi}{2}))}{n}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \sin\left(nx + \frac{n\pi}{2}\right) &= \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}_{= 0 \text{ für } n \text{ unger.}} \sin(nx) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(nx) \\ &= \begin{cases} \cos(nx) & n = 1, 5, 9, \dots, \\ -\cos(nx) & n = 3, 7, 11, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) - \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} - \frac{\cos(7x)}{7} + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos((2n-1)x)}{2n-1}. \end{aligned}$$

(iii) Analog zu Teilaufgabe (i) haben wir

$$\cos(x + \varphi) = C \sin(x) + D \cos(x),$$

mit

$$C = -\sin(\varphi), \quad D = \cos(\varphi).$$

Verwenden dieser Gleichung zusammen mit der Gleichung aus Teilaufgabe (i) ergibt

$$\begin{aligned} g(x) = f(x+c) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx+nc) + b_n \sin(nx+nc)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n (-\sin(nc) \sin(nx) + \cos(nc) \cos(nx)) \right. \\ &\quad \left. + b_n (\cos(nc) \sin(nx) + \sin(nc) \cos(nx)) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((a_n \cos(nc) + b_n \sin(nc)) \cos(nx) \right. \\ &\quad \left. + (-a_n \sin(nc) + b_n \cos(nc)) \sin(nx) \right) \end{aligned}$$

Somit sind die Fourierkoeffizienten von $g(x)$ gegeben durch

$$\tilde{a}_0 = a_0, \quad \tilde{a}_n = a_n \cos(nc) + b_n \sin(nc), \quad \tilde{b}_n = -a_n \sin(nc) + b_n \cos(nc).$$

LÖSUNG 13

(i) Seien f, g gerade. Es folgt

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x).$$

(ii) Seien f, g ungerade. Es folgt

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (fg)(x).$$

(iii) Sei f gerade und g ungerade. Es folgt

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(-x)) = -f(x)g(x) = -(fg)(x).$$

LÖSUNG 14

(i) Wir schreiben $f(x)$ als

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Der erste Term ist ungerade, der zweite Term ist gerade.

(ii) Sei $f_g(x)$ der gerade Anteil und $f_u(x)$ der ungerade Anteil von $f(x)$. Wir haben

$$f_g(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad f_u(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

(iii) Wir nehmen an $f(x)$ sei gerade und ungerade. Es folgt

$$f(x) = f(-x) = -f(x),$$

wobei wir für die erste Gleichung verwendet haben dass $f(x)$ gerade und für die zweite Gleichung dass $f(x)$ ungerade ist. Es folgt $f(x) \equiv 0$, i.e. die einzige Funktion die sowohl gerade als auch ungerade ist, ist die Funktion die konstant und gleich Null ist.

LÖSUNG 15

Wir haben

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T (f(t) + C) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt + \frac{2C}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt + \frac{2C}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega t) dt = 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, da bei beiden Integralen eine ungerade Funktion über ein symmetrisches Intervall integriert wird.

LÖSUNG 16

(i) Die dazugehörige ungerade periodische Erweiterung ergibt die Rechtecksfunktion. Somit haben wir

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

(ii) Die dazugehörige gerade periodische Erweiterung ist die Funktion $f(t) \equiv 1$. Somit verschwinden alle Fourierkoeffizienten bis auf $a_0 = 2$.

LÖSUNG 17

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

LÖSUNG 18

Mit der Fourier-Kosinusreihe ist die Fourierreihe der entsprechenden geraden Erweiterung gemeint. Diese Erweiterung besitzt die Periode $T = 4$. Somit folgt $\omega = \pi/2$. Wir haben

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{16}{3}, \quad a_n = \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}.$$

Somit folgt

$$f(t) = \frac{8}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right).$$

LÖSUNG 19

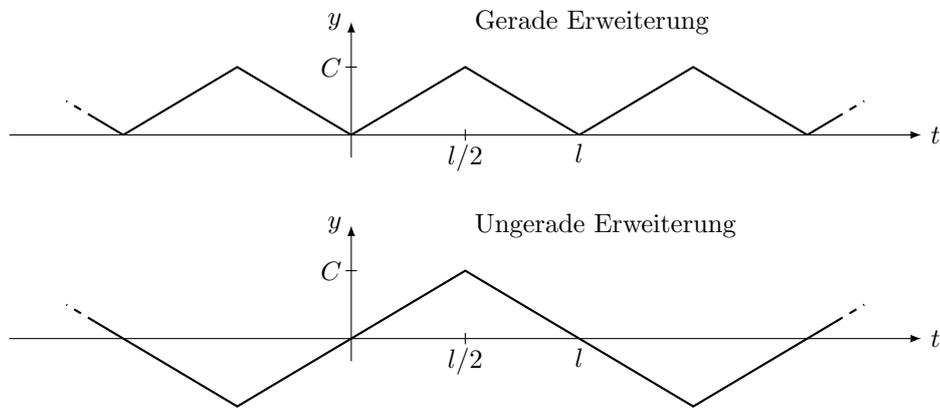
Wir haben $\tau = l$. Die gerade Erweiterung besitzt somit die Periode $T = 2l$. Die Fourierkoeffizienten der dazugehörigen Fourier-Kosinusreihe sind gegeben durch die Gleichungen

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt = \frac{4C}{l^2} \left(\int_0^{l/2} t dt + \int_{l/2}^l (l-t) dt \right),$$

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{4C}{l^2} \left(\int_0^{l/2} t \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt + \int_{l/2}^l (l-t) \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt \right).$$

Für die ungerade Erweiterung sind die Fourierkoeffizienten der Fourier-Sinusreihe gegeben durch die Gleichung

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{4C}{l^2} \left(\int_0^{l/2} t \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt + \int_{l/2}^l (l-t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt \right).$$



LÖSUNG 20

- (i) Die ungerade Erweiterung ergibt die 2π -periodische Funktion $f(x) = \sin(x)$. Somit ist die Fourier-Sinusreihe gegeben durch $f(x) = \sin(x)$, i.e. der einzige nicht-verschwindende Fourierkoeffizient ist $b_1 = 1$.
- (ii) Die gerade Erweiterung ergibt die 2π -periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) & -\pi \leq x < 0, \\ \sin(x) & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Die Koeffizienten a_n der Fourier-Kosinusreihe sind gegeben durch

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1 + \cos(n\pi)}{1 - n^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade,} \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)} & n \text{ gerade,} \end{cases}$$

Somit ist die Fourierkosinusreihe

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ gerade}} \frac{\cos(nx)}{n^2 - 1}.$$

LÖSUNG 21

$$c_0 = 0, c_n = \frac{j}{n}(-1)^n, (n \neq 0).$$

LÖSUNG 22

Für eine ungerade Funktion gilt für die reelle Darstellung $a_0 = 0, a_n = 0$. Aus den Gleichungen $a_0 = 2c_0, a_n = 2\operatorname{Re}(c_n)$ folgt $c_0 = 0, \operatorname{Re}(c_n) = 0$, i.e. die Koeffizienten der komplexen Darstellung sind rein imaginär. Für eine gerade Funktion gilt für die reelle Darstellung $b_n = 0$. Aus der Gleichung $b_n = -2\operatorname{Im}(c_n)$ folgt $\operatorname{Im}(c_n) = 0$, i.e. die Koeffizienten der komplexen Darstellung sind reell.

LÖSUNG 23

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \text{(ii)} \quad A_n &= 2|c_n|. \end{aligned}$$

LÖSUNG 24

Wir schreiben:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}). \end{aligned}$$

Die Terme in der Summe schreiben wir als

$$\begin{aligned} c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t} &= c_n e^{jn\omega t} + \overline{c_n} e^{-jn\omega t} \\ &= c_n e^{jn\omega t} + \overline{c_n e^{jn\omega t}} \\ &= 2\operatorname{Re}(c_n e^{jn\omega t}). \end{aligned}$$

Die in der Aufgabe gegebene Identität ergibt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(c_n e^{jn\omega t}) &= \operatorname{Re}(c_n) \operatorname{Re}(e^{jn\omega t}) - \operatorname{Im}(c_n) \operatorname{Im}(e^{jn\omega t}) \\ &= \operatorname{Re}(c_n) \cos(n\omega t) - \operatorname{Im}(c_n) \sin(n\omega t). \end{aligned}$$

Es folgt

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2\operatorname{Re}(c_n) \cos(n\omega t) - 2\operatorname{Im}(c_n) \sin(n\omega t)).$$

Daraus lesen wir die Koeffizienten der reellen Darstellung ab:

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = 2\operatorname{Re}(c_n), \quad b_n = -2\operatorname{Im}(c_n).$$

Die Formeln für a_n, b_n ergeben sich somit zu

$$\begin{aligned} a_n = 2\operatorname{Re}(c_n) &= 2\operatorname{Re} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{Re}(e^{-jn\omega t}) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \end{aligned}$$

wobei wir von der ersten auf die zweite Zeile verwendet haben dass $f(t)$ reell ist und in der letzten Gleichung dass $\cos(\dots)$ eine gerade Funktion ist.

LÖSUNG 25

Wir haben

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2},$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 e^{-jn\pi t/2} = \dots = \frac{j}{2\pi n} ((-1)^n - 1),$$

wobei wir $\omega = 2\pi/T = \pi/2$ benutzt haben. Somit ist die komplexe Darstellung der Fourierreihe

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{j}{2\pi n} ((-1)^n - 1) e^{jn\omega t}.$$

Mit $a_n = 2\text{Re}(c_n)$, $b_n = -2\text{Im}(c_n)$ folgt

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad n \neq 0, \quad b_n = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n}$$

und die reelle Darstellung ist

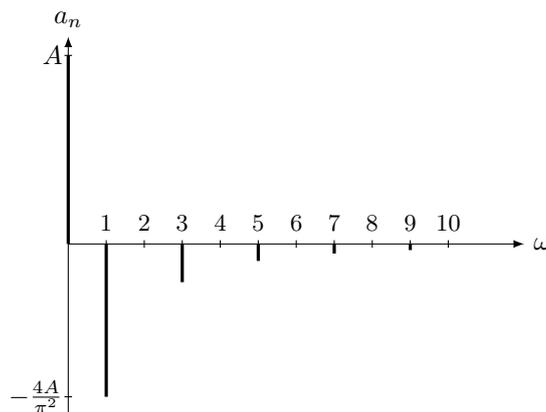
$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \sin(n\omega t).$$

LÖSUNG 26

$$f(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n \text{ unger.}} -\frac{4A}{\pi^2 n^2} \cos(n\omega t),$$

wobei $\omega = 2\pi/T$. Spektrum: Wir haben

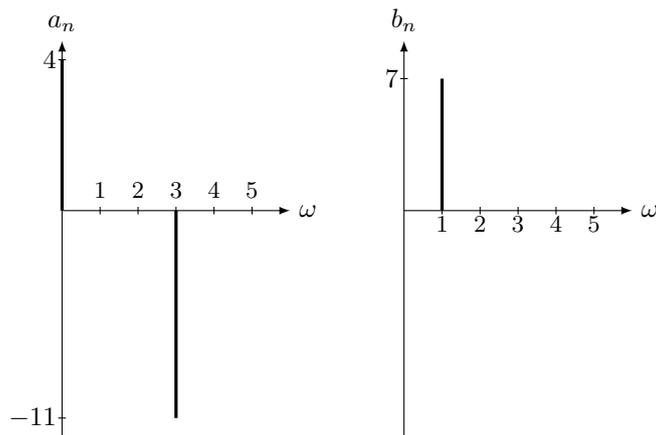
$$a_0 = A, \quad a_n = -\frac{4A}{\pi^2 n^2} \quad \text{für } n \text{ ungerade}, \quad b_n = 0.$$



LÖSUNG 27

Die Amplituden, welche nicht gleich Null sind, sind

$$a_0 = 4, \quad a_3 = -11, \quad b_1 = 7.$$



LÖSUNG 28

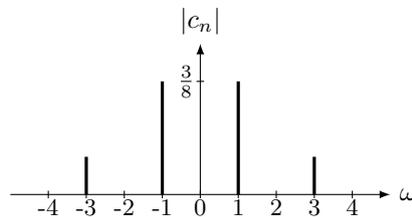
Wir haben

$$\sin^3(3\pi t) = \left(\frac{e^{j3\pi t} - e^{-j3\pi t}}{2j} \right)^3 = -\frac{1}{8j} (e^{j9\pi t} - 3e^{j3\pi t} + 3e^{-j3\pi t} - e^{-j9\pi t}).$$

Somit besitzt die Funktion die Grundfrequenz $\omega = 3\pi$ und die nichtverschwindenden Fourierkoeffizienten sind

$$c_3 = \frac{j}{8}, \quad c_{-3} = -\frac{j}{8}, \quad c_1 = -\frac{3j}{8}, \quad c_{-1} = \frac{3j}{8}.$$

Das Spektrum ist:



LÖSUNG 29

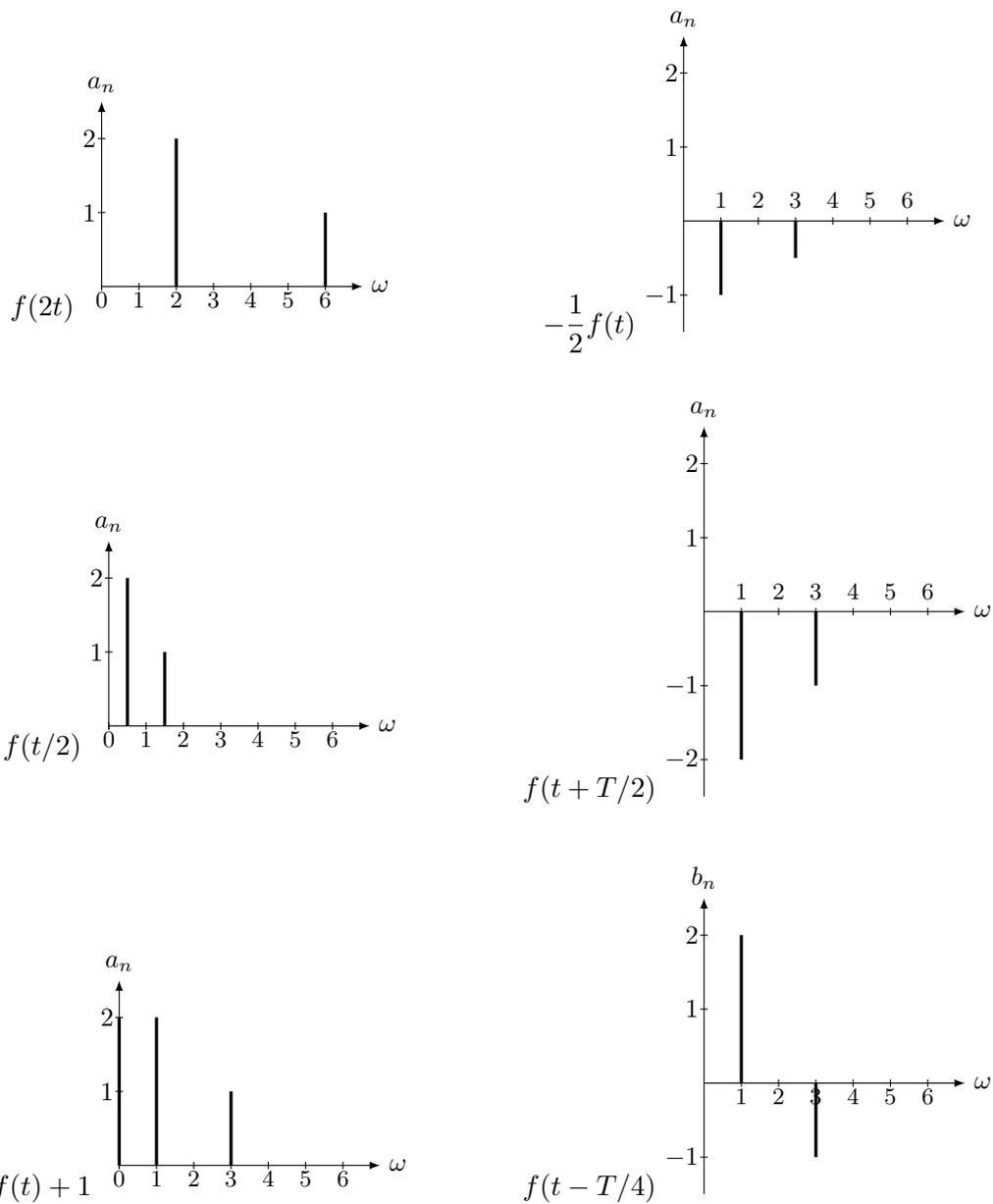
Wir nehmen an $\arg(c_n) = 0$. Aus $T = \pi$ folgt $\omega = 2\pi/T = 2$. Aus dem Spektrum lesen wir

$$c_{-2} = 1, \quad c_{-1} = 2, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 1.$$

Somit haben wir

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = e^{-j4t} + 2e^{-j2t} + 2e^{j2t} + e^{j4t} = 4 \cos(2t) + 2 \cos(4t).$$

LÖSUNG 30



LÖSUNG 31

(i) Wir haben $T = 1$. Somit folgt $\omega = 2\pi$. Wir haben

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^\lambda 2 dt = \dots = 4\lambda,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^1 f(t) \cos(n\omega t) dt = 2 \int_0^\lambda 2 \cos(2\pi n t) dt = \dots = \frac{2 \sin(2\pi n \lambda)}{n\pi},$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^1 f(t) \sin(n\omega t) dt = 2 \int_0^\lambda 2 \sin(2\pi n t) dt = \dots = \frac{2(1 - \cos(2\pi n \lambda))}{\pi n}.$$

(ii) Der Mittelwert ist $a_0/2 = 2\lambda \stackrel{!}{=} 1.2$. Daraus folgt $\lambda = 0.6$.

(iii) Das quadratische Mittel ist

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt} = \sqrt{\int_0^\lambda 2^2 dt} = 2\sqrt{\lambda} \stackrel{!}{=} 1.2.$$

Daraus folgt $\lambda = 0.36$.

(iv) Für $n \neq 0$ haben wir

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt = \int_0^\lambda 2e^{-jn2\pi t} dt = \dots = \frac{j}{n\pi} (e^{-jn2\pi\lambda} - 1)$$

und für $n = 0$ haben wir

$$c_0 = \int_0^\lambda 2 dt = 2\lambda.$$

LÖSUNG 32

Wir lassen im folgenden die Einheiten weg. Die Spannung ist $U(t) = 5 \sin(2000\pi t)$. Somit ist die momentane Leistung $P(t) = U(t)^2/R = U(t)^2$.

(i)

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T 25 \sin^2(2000\pi t) dt = \dots = \frac{25}{2},$$

wobei wir den Hinweis und Substitution verwendet haben. Dieses Resultat kann direkt mit Parseval hergeleitet werden. Die Sinusspannung entspricht einer Fourierreihe mit nur einem Term: $U(t) = b_1 \sin(\omega t)$, mit $b_1 = 5$. Parseval liefert

$$\frac{1}{T} \int_0^T U(t)^2 dt = \frac{1}{2} b_n^2 = \frac{25}{2}.$$

(ii) Die mittlere Leistung ist

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)^2 dt = 1000 \int_0^{1/1000} 25 dt = 25.$$

(iii) Die Rechtecksspannung besitzt die Fourierreihe

$$U(t) = \frac{20}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{1}{n} \sin(n\omega t).$$

Die Fundamentalfrequenz ist ω und die dazugehörige Amplitude ist $b_1 = 20/\pi$. Aus Parseval folgt dass die mittlere Leistung des Anteils mit der Fundamentalfrequenz gegeben ist durch

$$\frac{1}{2} b_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{20}{\pi} \right)^2 = \frac{200}{\pi^2}.$$

(iv) Wir haben

$$c_1 = \frac{1}{2} (a_1 - j b_1) = -\frac{1}{2} j b_1.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2} b_1^2 = -2 c_1^2.$$

(v) Der Anteil ist

$$\frac{200/\pi^2}{25} = \frac{8}{\pi^2} \approx 0.81,$$

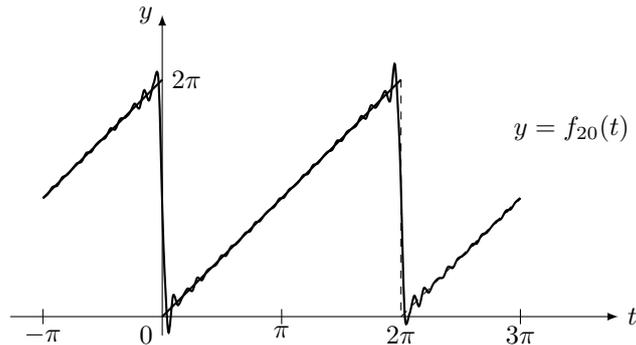
i.e. der Anteil ist 81 %.

LÖSUNG 33

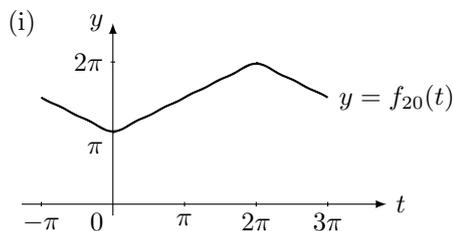
F1-S5, F2-S3, F3-S2, F4-S1, F5-S4.

LÖSUNG 34

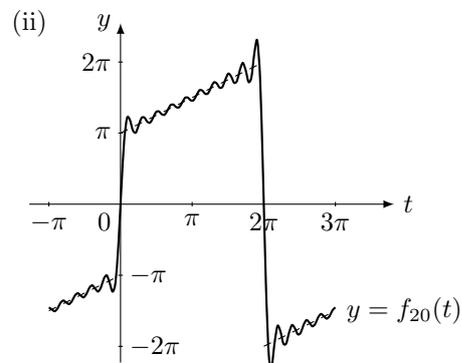
- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\pi) = \pi$. Dieser Wert befindet sich an einer Stelle an welcher die Funktion $f(t)$ stetig ist und somit konvergiert die Fourierreihe gegen den Funktionswert, i.e. gegen $f(\pi) = \pi$.
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(2\pi) = \pi$. Dieser Wert befindet sich an einer Stelle an welcher die Funktion eine Sprungstelle (=Unstetigkeit) aufweist. Die Fourierreihe konvergiert somit gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts. Dieser Mittelwert ist π .
- (iii) Man beachte: Der Verlauf von $f_{20}(t)$ ist stetig, Gibbs Phänomen tritt auf.



LÖSUNG 35



$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(2\pi) = 2\pi$$



$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(2\pi) = 0$$

LÖSUNG 36

Die dazugehörige Fourierreihe ist

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ unger.}} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Der Graph von $\frac{df}{dx}(x)$ entspricht der 2π -periodischen Rechtecksfunktion mit Amplitude gleich Eins.

LÖSUNG 37

$$x(t) = \frac{4}{27} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8(-1)^n}{(9 - n^2\pi^2)n^2\pi^2} \cos(n\pi t).$$

LÖSUNG 38

(i) $f(t)$ besitzt die Grundfrequenz $\omega = 1$. Mit

$$f(t) = \sin(t) + \cos(2t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} + \frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2}$$

folgt

$$c_1 = -\frac{j}{2}, \quad c_{-1} = \frac{j}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_{-2} = \frac{1}{2},$$

die verbleibenden c_n sind gleich Null.

(ii) Ansatz für $y(t)$ als Fourierreihe und zweite Ableitung davon:

$$y(t) = \sum_n d_n e^{jnt}, \quad y''(t) = \sum_n -n^2 d_n e^{jnt}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$\sum_n d_n (5 - n^2) e^{jnt} = \sum_n c_n e^{jnt}.$$

Daraus folgt $d_n = c_n / (5 - n^2)$ und somit sind die gesuchten Fourierkoeffizienten

$$d_1 = -\frac{j}{8}, \quad d_{-1} = \frac{j}{8}, \quad d_2 = \frac{1}{2}, \quad d_{-2} = \frac{1}{2}.$$

(iii) Die stationäre Lösung ist

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{j}{8} e^{jt} + \frac{j}{8} e^{-jt} + \frac{1}{2} e^{2jt} + \frac{1}{2} e^{-2jt} \\ &= \frac{1}{4} \sin(t) + \cos(2t). \end{aligned}$$

Somit sind die Fourierkoeffizienten der reellen Darstellung

$$a_2 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{4},$$

alle anderen Koeffizienten sind gleich Null.

LÖSUNG 39

(i) Die Fourierreihe der Rechtecksfunktion ist

$$q(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ unger.}}} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Daraus erhalten wir die gesuchte Fourierreihe durch Multiplikation mit $-\pi/4$, Verschiebung (i.e. Subtraktion) um $-\pi/4$ in y -Richtung und $x \mapsto x\pi/2$. Es ergibt sich

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} - \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ unger.}}} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{nx\pi}{2}\right).$$

(ii) Wir verwenden $c_0 = a_0/2 = 0$ und ($n > 0$)

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n).$$

Wir erhalten

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(-j\frac{4}{\pi}\frac{1}{n}) = \frac{2}{j\pi n} & n \text{ ungerade,} \\ 0 & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

$$c_{-n} = \begin{cases} \frac{1}{2}j\frac{4}{\pi}\frac{1}{n} = -\frac{2}{j\pi n} & n \text{ ungerade,} \\ 0 & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Somit haben wir $c_n = \frac{2}{j\pi n}$ für n ungerade (positiv und negativ) und die Fourierreihe der Rechtecksfunktion in komplexer Darstellung ist

$$q(x) = \sum_{n \text{ unger.}} \frac{2}{j\pi n} e^{jnt}.$$

(iii) Der Ansatz

$$g(x) = \sum_n c_n e^{jn\omega t},$$

eingesetzt in der Differentialgleichung, führt auf

$$\sum_n (-n^2\omega^2 + 4)c_n e^{jn\omega t} = \sum_{n \text{ unger.}} \frac{2}{j\pi n} e^{jnt}.$$

Somit haben wir

$$\omega = 1, \quad c_n = \frac{2}{j\pi n(4 - n^2)} \quad n \text{ unger.}$$

und eine stationäre Lösung ist

$$g(x) = \sum_{n \text{ unger.}} \frac{2}{j\pi n(4 - n^2)} e^{jnt}.$$

LÖSUNG 40

- (i) Aus $U_C + U_2 = U_1$ und $U_C = Q/C$ folgt durch Zeitableitung $I/C + \dot{U}_2 = \dot{U}_1$. Zusammen mit $I = U_2/R$ folgt die Differentialgleichung $\dot{U}_2 + \frac{1}{RC}U_2 = \dot{U}_1$.
- (ii) Wir beginnen mit der Fourierreihe der 2π -periodischen Sägezahnfunktion:

$$s(t) = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Daraus folgt

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega t)}{n},$$

wobei $\omega = 2\pi/T = 2000\pi$ ($T = 1/1000$). I.e. die Fourierkoeffizienten von $U_1(t)$ sind

(iii) Wir machen den Ansatz

$$U_2(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

Es folgt

$$\dot{U}_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n n\omega \sin(n\omega t) + b_n n\omega \cos(n\omega t)).$$

Eingesetzt in der Differentialgleichung ergibt (mit $1/RC = 1000$)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n n\omega \sin(n\omega t) + b_n n\omega \cos(n\omega t)) \\ & + 1000 \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \right) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \omega \cos(n\omega t). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & b_n n\omega + 1000a_n &= -\frac{\omega}{\pi}, \\ & & -a_n n\omega + 1000b_n &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$a_0 = 0, \quad a_n = -\frac{2}{1 + 4\pi^2 n^2}, \quad b_n = -\frac{4\pi n}{1 + 4\pi^2 n^2}.$$

I.e.

$$U_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{1 + 4\pi^2 n^2} \cos(n\omega t) - \frac{4\pi n}{1 + 4\pi^2 n^2} \sin(n\omega t) \right).$$

LÖSUNG 41

(i) Die gesuchten Konstanten C_n sind die Koeffizienten der Fourier-Sinusreihe von $f(x)$. Sie sind gegeben durch

$$C_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx.$$

Die Funktion $\sin(n\pi x)$ für gerades n ist ungerade bezüglich $x = 1/2$. Somit verschwinden die C_n für gerades n . Für ungerades n ist die Funktion $\sin(n\pi x)$ gerade bezüglich $x = 1/2$. Somit haben wir für ungerades n :

$$C_n = 4 \int_0^{1/2} x \sin(n\pi x) dx = \dots = \frac{4 \sin(n\pi/2)}{n^2 \pi^2} = \begin{cases} \frac{4}{n^2 \pi^2} & n = 1, 5, 9, 13, \dots, \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2} & n = 3, 7, 11, 15, \dots, \end{cases}$$

Die Temperatur im Stab ist gegeben durch (wir verwenden den Ausdruck mit $\sin(\dots)$ für die C_n um die Darstellung zu vereinfachen)

$$u(t, x) = \sum_{n \text{ unger.}}^{\infty} \frac{4 \sin(n\pi/2)}{n^2 \pi^2} \sin(n\pi x) \exp(-n^2 \pi^2 a^2 t).$$

Das folgende Programm zeigt den Temperaturverlauf in Abhängigkeit der Zeit:

```

MATLAB
k=2000;l=200;a=sqrt(10^(-5));
n=linspace(1,k,k);x=linspace(0,1,1);
m=2*n-1;
cm=4*sin(m*pi/2)./(m.^2*pi^2);%Fourierkoeffizienten
F=sin(x.*m*pi);
for t=0:10:10000
    u=F*(cm.*exp(-m.^2*pi^2*a^2*t));
    plot(x,u,'k')
    xlabel(['Zeit=' num2str(t) 's']);ylabel('Temperatur [K]');
    grid on;axis([0,1,0,1]);
    pause(0.01)
end

```

(ii) Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x) \exp(-n^2 \pi^2 a^2 t) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x) n\pi \exp(-n^2 \pi^2 a^2 t) \end{aligned}$$

Mit den C_n eingesetzt:

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x} = -k \sum_{n \text{ unger.}}^{\infty} \frac{4 \sin(n\pi/2)}{n\pi} \cos(n\pi x) \exp(-n^2 \pi^2 a^2 t).$$

Somit folgt

$$q(t, 0) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = -k \sum_{n \text{ unger.}}^{\infty} \frac{4 \sin(n\pi/2)}{n\pi} \exp(-n^2 \pi^2 a^2 t).$$

Das folgende Programm zeigt den Wärmefluss q bei $x = 0$ in Abhängigkeit der Zeit t (die Konstante k wurde gleich Eins gesetzt):

```

MATLAB
k=2000;l=200;a=sqrt(10^(-5));
n=linspace(1,k,k);x=linspace(0,1,1);
m=2*n-1;
cm=4*sin(m*pi/2)./(m.^2*pi^2);%Fourierkoeffizienten
t=linspace(0,100000,1000);
q=-(exp(-t.*(m.^2)*pi^2*a^2))*(cm.*m*pi)';
plot(t,q)
xlabel(['Zeit [s]']);ylabel('q [W/m^2]');

```

(i) Der Ansatz $y(t, x) = T(t)X(x)$ in die Wellengleichung eingesetzt ist

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (T(t)X(x)) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T(t)X(x)).$$

Daraus folgt

$$X(x)T''(t) = a^2 T(t)X''(x),$$

i.e.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Die linke Seite hängt nur von t , die rechte Seite hängt nur von x ab. Somit müssen beide Seiten gleich einer Konstanten sein, i.e.

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

für eine unbekannte Konstante λ . Dies sind die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T''(t) = \lambda a^2 T(t), \quad X''(x) = \lambda X(x).$$

(ii) Die Bedingungen $y(t, 0) = y(t, L) = 0$ ergeben die Bedingungen

$$X(0) = X(L) = 0.$$

(iii) Genau gleich wie bei der Betrachtung der Wärmeleitungsgleichung sind die möglichen Lösungen gegeben durch

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Hier sind die B_n noch zu bestimmende Konstanten. Die dazugehörigen möglichen Werte für die Konstante λ sind

$$\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(iv) Die Bedingung $\frac{\partial y}{\partial t}(0, x)$ ergibt die Bedingung

$$T'(0) = 0.$$

(v) Die allgemeine Lösung der Gleichung $T'' = \lambda a^2 T$ mit $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ ist

$$T(t) = A \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + B \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right).$$

Daraus folgt

$$T'(t) = -\frac{An\pi a}{L} \sin\left(\frac{n\pi at}{L}\right) + \frac{Bn\pi a}{L} \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right).$$

Mit $T'(0) = 0$ folgt $B = 0$. Somit sind die möglichen Lösungen

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(vi) Die Lösungen $X_n(x)$ und $T_n(t)$ in den Ansatz $y(t, x) = T(t)X(x)$ eingesetzt ergeben die Lösungen

$$y_n(t, x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei wir $C_n = A_n B_n$ gesetzt haben. Die C_n sind somit noch zu bestimmende Konstanten.

(vii) Analog zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist jede Linearkombination der Lösungen in (vi) auch eine Lösung der Wellengleichung. I.e.

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right)$$

löst die Wellengleichung. Die Bedingung $y(0, x)$ ist nun

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x),$$

i.e. die Konstanten C_n sind die Fourierkoeffizienten der Fourier-Sinusreihe der Funktion $f(x)$. Diese sind gegeben durch

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Die Lösung des gestellten Problems ist somit

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(\chi) \sin\left(\frac{n\pi \chi}{L}\right) d\chi \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right).$$

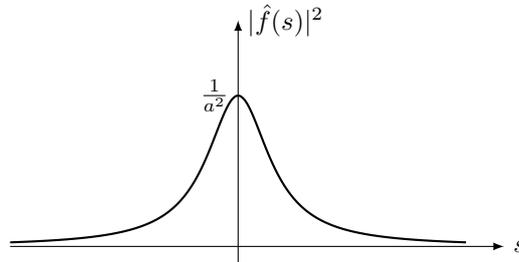
LÖSUNG 43

Wir haben

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-j2\pi st} e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi s)t} dt = \dots = \frac{1}{a + j2\pi s}.$$

Somit folgt

$$|\hat{f}(s)|^2 = \frac{1}{|a + j2\pi s|^2} = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 s^2}.$$



LÖSUNG 44

Wir schreiben

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}.$$

Die Fouriertransformierte ist

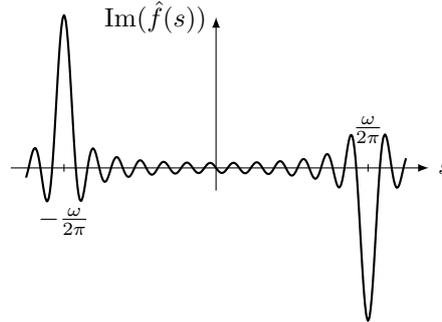
$$\begin{aligned} \hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi st} dt = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-j2\pi st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\tau}^{\tau} \left(e^{j(\omega-2\pi s)t} - e^{-j(\omega+2\pi s)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{e^{j(\omega-2\pi s)t}}{j(\omega-2\pi s)} \Bigg|_{-\tau}^{\tau} + \frac{e^{-j(\omega+2\pi s)t}}{j(\omega+2\pi s)} \Bigg|_{-\tau}^{\tau} \right) \end{aligned}$$

$$= -j \left(\frac{\sin((\omega - 2\pi s)\tau)}{\omega - 2\pi s} - \frac{\sin((\omega + 2\pi s)\tau)}{\omega + 2\pi s} \right).$$

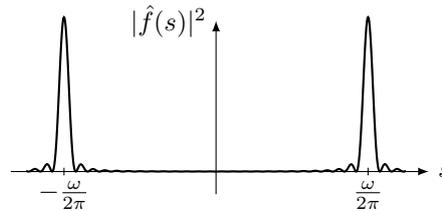
Somit haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\hat{f}(s)) &= 0, & \operatorname{Im}(\hat{f}(s)) &= \frac{\sin((\omega + 2\pi s)\tau)}{\omega + 2\pi s} - \frac{\sin((\omega - 2\pi s)\tau)}{\omega - 2\pi s} \\ & & &= \tau \operatorname{sinc}\left((\omega/\pi + 2s)\tau\right) - \tau \operatorname{sinc}\left((\omega/\pi - 2s)\tau\right) \end{aligned}$$

Der Graph dazu ist



und der Graph für $|\hat{f}(s)|^2$ ist somit



Für $\tau \rightarrow \infty$ ergeben sich im Spektrum zwei Spektrallinien bei $\pm\omega/2\pi$. Die dazugehörige reelle Fourierreihe hat dann (nur) den Koeffizienten $b_1 = -2\operatorname{Im}(c_1)$, i.e. für $\tau \rightarrow \infty$ ergibt sich das diskrete Spektrum der Funktion $\sin(\omega t)$ (bis auf einen Vorfaktor).

LÖSUNG 45

Wir verwenden die Substitution $u = s - a$:

$$\begin{aligned} \check{g}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{j2\pi st} ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s-a)e^{j2\pi st} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{j2\pi(u+a)t} du = e^{j2\pi at} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{j2\pi ut} du = e^{j2\pi at} \check{f}(t). \end{aligned}$$

LÖSUNG 46

Der Beweis benutzt die Substitution $u = at$:

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j2\pi st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j2\pi su/a} \frac{du}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j2\pi \frac{s}{a} u} du = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned}$$

LÖSUNG 47

$$\check{f}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{j2\pi s(-t)} ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j2\pi st} ds = \hat{f}(t).$$

LÖSUNG 48

Gerade: Abgeschnittener Kosinus. Die Transformation ist für $s > 0$ eine um die Frequenz des Kosinus nach rechts verschobene sinc-Funktion, für $s < 0$ das gerade Gegenstück. Für eine Skizze siehe den entsprechenden Theorieabschnitt. Weitere Beispiele für gerade Funktionen sind der Knall (ergibt die (gerade) sinc-Funktion) oder die Gausskurve (ergibt die (gerade) Gausskurve). Die Imaginärteile sind jeweils Null.

Ungerade: Abgeschnittener Sinus. Der Imaginärteil der Transformation ist für $s > 0$ eine um die Frequenz des Sinus nach rechts verschobene sinc-Funktion, für $s < 0$ das ungerade Gegenstück. Der Realteil ist Null. Siehe entsprechende Aufgabe.

LÖSUNG 49

(i)

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{f}(s) \\ t \mapsto t-a \downarrow & & \downarrow \cdot e^{-j2\pi as} \\ f(t-a) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-j2\pi as} \hat{f}(s) \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{f}(s) \\ t \mapsto at \downarrow & & \downarrow \\ f(at) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \\ t \mapsto t + \frac{b}{a} \downarrow & & \downarrow \cdot e^{j2\pi s \frac{b}{a}} \\ f(at + b) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{j2\pi s \frac{b}{a}} \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \end{array} \quad \text{Korrektur: ohne zusätzlichen Faktor } a$$

LÖSUNG 50

Wir lassen den Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ vorerst weg. Die Transformation von $e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ erhalten wir durch

$$\begin{array}{ccc} e^{-\pi t^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & e^{-\pi s^2} \\ t \mapsto \frac{t}{\sqrt{2\pi\sigma}} \downarrow & & \downarrow \\ e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \sqrt{2\pi\sigma} e^{-\pi^2 2\sigma^2 s^2} \end{array}$$

Somit erhalten wir

$$\hat{f}(s) = e^{-2\pi^2 \sigma^2 s^2}.$$

LÖSUNG 51

Wir haben

$$\hat{f}(s) = e^{j\pi s\tau} - e^{-j\pi s\tau} = 2j \sin(\pi s\tau).$$

Korrektur: falsch war:

$$\hat{f}(s) = e^{j2\pi s\tau} - e^{-j\pi s\tau} = 2j \sin(\pi s\tau).$$

