MINISKRIPT KOMPLEXE ZAHLEN
VERSION 19. April 2021

LISIBACH ANDRÉ

0.1. Definition der komplexen Zahlen.

0.1.1. *Imaginäre Einheit.* Wir betrachten die Gleichung $x^2 + 1 = 0$. Diese Gleichung hat keine reelle Lösung. Umstellen und formal die Wurzel ziehen ergibt $x = \pm\sqrt{-1}$. Im folgenden schreiben wir statt $\sqrt{-1}$ einfach j. Wir nennen j die *imaginäre Einheit*[1]. Mit dieser Definition hat die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ die Lösungen $x = \pm j$.

0.1.2. *Imaginäre Zahlen.* Multiplizieren wir die imaginäre Einheit j mit einer reellen Zahl y so erhalten wir yj und nennen dieses Produkt *imaginäre Zahl.* Beispiele für imaginäre Zahlen sind $7j$, $-10000j$, $0.2j$, $\frac{1}{5}j$, $\sqrt{2}j$, πj. Für das Rechnen mit imaginären Zahlen gelten alle üblichen algebraischen Rechengesetze aber wir haben zusätzlich $j^2 = -1$. Rechenbeispiele:

$$\begin{aligned}
4j + 5j &= 9j, \\
7j - 11j &= -4j, \\
(3j) \cdot (5j) &= 3 \cdot 5 \cdot j \cdot j = 15j^2 = -15, \\
j^5 &= j^2 \cdot j^2 \cdot j = (-1) \cdot (-1) \cdot j = j.
\end{aligned}$$

Wir sind nun im Stande Gleichungen wie $x^2 + 9 = 0$ oder $x^2 - 4x + 13 = 0$ zu lösen (siehe Unterricht).

0.1.3. *Komplexe Zahlen.* Addieren wir zu einer imaginären Zahl yj eine reelle Zahl x so erhalten wir $x + yj$ und nennen dies *komplexe Zahl* z, i.e. $z = x + yj$. Die Darstellungsform $z = x + yj$ heisst *Normalform* oder *kartesische Form.* Wir werden später weitere Darstellungsformen kennenlernen. Ist die komplexe Zahl in der Normalform gegeben, i.e. $z = x + yj$, so heisst $x := \text{Re}(z)$ *Realteil* von z und $y := \text{Im}(z)$ *Imaginärteil* von z (der Realteil x und der Imaginärteil y sind beides reelle Zahlen). Die Real- und Imaginärteile von $z = 3 + 2j$ sind 3 und 2 respektive.

Die Menge $\mathbb{C} = \{z | z = x + yj; x, y \in \mathbb{R}\}$ heisst *Menge der komplexen Zahlen* (wie üblich bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen). Wir bemerken dass eine komplexe Zahl mit verschwindendem Imaginärteil eine reelle Zahl ist und umgekehrt.

Auch für komplexe Zahlen gelten die üblichen algebraischen Rechengesetze. Rechenbeispiele für Addition, Subtraktion und Multiplikation komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned}
(3 + 2j) + (4 + 5j) &= 3 + 2j + 4 + 5j \\
&= 7 + 7j, \\
(3 + 2j) - (4 + 5j) &= 3 + 2j - 4 - 5j \\
&= -1 - 3j,
\end{aligned}$$

[1] In der Mathematik und Physik ist es üblich die imaginäre Einheit mit i zu bezeichnen. In der Elektrotechnik wird jedoch dafür das Symbol j verwendet, da die Bezeichnung i für die Stromstärke verwendet wird.

$$
\begin{aligned}
(3+2j)\cdot(4+5j) &= 12+15j+8j+10\underbrace{j^2}_{=-1}\\
&= 12+15j+8j-10\\
&= 2+23j.
\end{aligned}
$$

In diesen Rechenbeispielen wurde jeweils die Summe, die Differenz und das Produkt zweier komlexer Zahlen wieder als komplexe Zahl in der Normalform, i.e. in der Form $x+yj$, geschrieben. Für die Division zweier komplexer Zahlen erweitern wir zuerst geschickt und berechnen dann Zähler und Nenner separat:

$$
\begin{aligned}
\frac{(3+2j)}{(4+5j)} &= \frac{(3+2j)}{(4+5j)}\underbrace{\frac{(4-5j)}{(4-5j)}}_{=1}\\
&= \frac{12-15j+8j-10j^2}{16-20j+20j-25j^2}\\
&= \frac{22-7j}{41}\\
&= \frac{22}{41}-\frac{7}{41}j.
\end{aligned}
$$

Wir sehen dass mit dem 'geschickten' Erweitern gemeint ist, so zu erweitern dass der Nenner reell wird. Allgemein ist das Produkt von $x+yj$ mit $x-yj$ immer reell:

$$
\begin{aligned}
(x+yj)(x-yj) &= x^2-xyj+yxj-y^2j^2\\
&= x^2+y^2.
\end{aligned}
$$

Dies ist eine Anwendung der binomischen Formel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ mit $a=x$, $b=yj$.

0.1.4. *Konjugiert komplexe Zahl.* Man nennt die komplexe Zahl $\overline{z}=x-yj$ die zu $z=x+yj$ *konjugiert komplexe Zahl.*[2] Der Übergang von der komplexen Zahl z zur konjugiert komplexen Zahl $\overline{z}$ bedeutet einen Vorzeichenwechsel im Imaginärteil, während der Realteil unverändert bleibt. Beispiele:

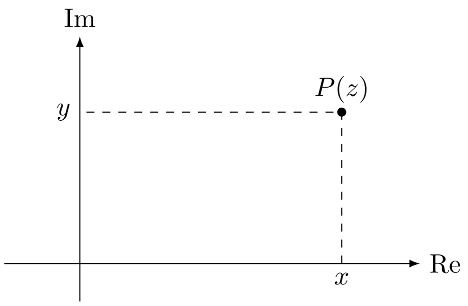
z	$7+3j$	13	$-9j$
$\overline{z}$	$7-3j$	13	$9j$

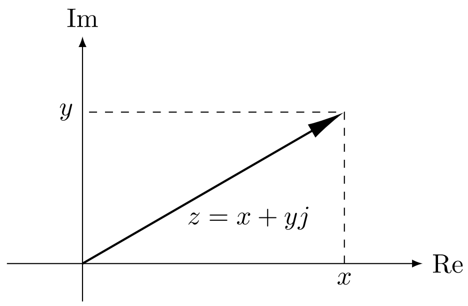
0.2. **Gausssche Zahlenebene.**

0.2.1. *Punkt- und Zeigerdarstellung.* Wir betrachten eine komplexe Zahl $z=x+yj$. Nun fassen wir den Realteil dieser komplexen Zahl, also x, und den Imaginärteil dieser komplexen Zahl, also y, als kartesische Koordinaten eines Punktes P in der x-y-Ebene auf. Somit lässt sich jeder komplexen Zahl z genau ein Bildpunkt $P(z)$ in der Ebene zuordnen. Diese Zuordnung ist invertierbar, indem wir von einem Punkt P in der Ebene die x-Koordinate und die y-Koordinate ablesen und dann eine komplexe Zahl bilden mit Realteil x und Imaginärteil y, also $z=x+yj$. Die Ebene wird *komplexe Ebene* oder *Gausssche Zahlenebene* genannt, die Achsen nennt man *reelle Achse* und *imaginäre Achse.*

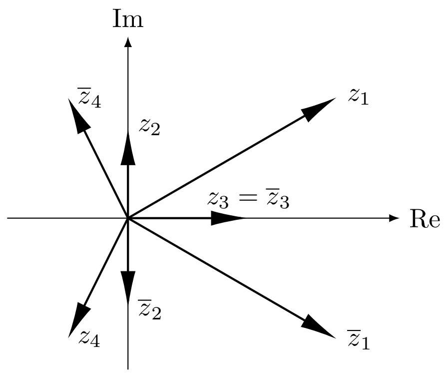
[2] Häufig wird in der Literatur die Notation z^* anstelle von $\overline{z}$ für die zu z konjugiert komplexe Zahl benutzt. Im vorliegenden Skript werden wir $\overline{z}$ verwenden.

Eine weitere Darstellung einer komplexen Zahl z in der Gaussschen Zahlenebene ist durch einen Pfeil vom Ursprung zum Bildpunkt $P(z)$ gegeben. Man nennt dies die *Zeigerdarstellung.*

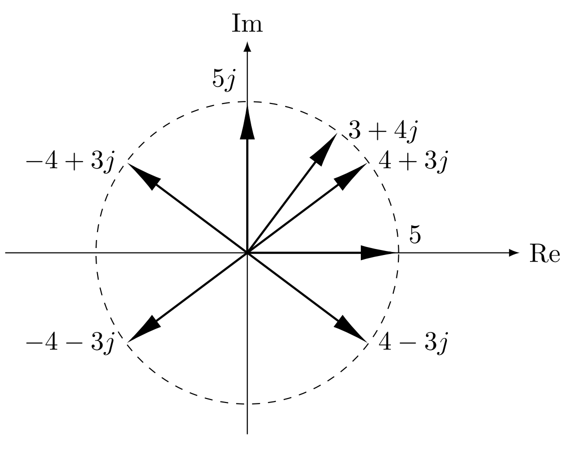




Die Imaginärteile von z und $\overline{z}$ haben unterschiedliche Vorzeichen, deshalb liegen die zugehörigen Bildpunkte spiegelsymmetrisch zur reellen Achse (siehe Abbildung).

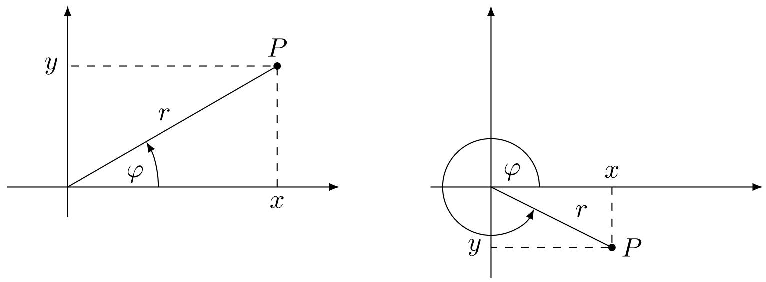


0.2.2. *Betrag einer komplexen Zahl.* Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + yj$ wird mit $|z|$ bezeichnet und ist gleich der Länge des Zeigers in der komplexen Ebene: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pythagoras). Beispiele $|4 + 3j| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, aber auch $|4 - 3j| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$. Ebenso $| - 4 + 3j| = | - 4 - 3j| = 5$ und $|3 + 4j| = | - 5| = |5j| = 5$. Es ist anschaulich diese Beispiele in der komplexen Ebene zu skizzieren, die Spitzen der Pfeile liegen alle auf dem Kreis mit Radius 5 um den Ursprung.



0.3. **Polarform.** Wir haben eine komplexe Zahl $z = x + yj$ mit einem Punkt P in der Ebene (oder einem Zeiger) identifiziert. Dieser Punkt ist eindeutig gegeben durch die beiden kartesischen Koordinaten x und y. Nun werden wir den Punkt in der Ebene mit anderen Koordinaten beschreiben, den Polarkoordinaten.

0.3.1. *Polarkoordinaten.* Die Polarkoordinaten eines Punktes P sind der *Radius* und der *Polarwinkel.* Die beiden sind folgendermassen gegeben. Der Radius ist der Abstand des Punktes P zum Ursprung. Für den Polarwinkel betrachten wir die Linie vom Ursprung zu dem betrachteten Punkt P. Der Polarwinkel ist nun der Winkel welcher diese Linie mit der Abszisse bildet. Dieser Winkel wird entgegen dem Uhrzeigersinn und von der Abszisse aus positive gemessen. Die gebräuchlichsten Bezeichnungen sind r und φ.



0.3.2. *Koordinatentransformation.* Es ist möglich zwischen den beiden Koordinatensystemen hin- und herzuwechseln, i.e. aus den Polarkoordinaten die kartesischen Koordinaten zu bestimmen und umgekehrt. Man nennt diesen Wechsel *Koordinatentransformation.*

Wir beginnen damit aus den Polarkoordinaten r, φ die kartesischen Koordinaten x, y zu bestimmen. Mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen sehen wir dass

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi), \\ y &= r\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Sei beispielsweise ein Punkt in der Ebene durch die Polarkoordinaten $r = 4$ und $\varphi = \pi/3$ gegeben. Dann folgt für die kartesischen Koordinaten $x = 4\cos(\pi/3) = 2$ und $y = 4\sin(\pi/3) = 2\sqrt{3}$.

Die Berechnung der Polarkoordinaten r, φ aus den kartesischen Koordinaten x, y erfolgt nach den Formeln

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan(\varphi) &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Die erste folgt direkt aus Pythagoras. Das Auflösen der zweiten Gleichung nach φ führt meistens zu Schwierigkeiten, da die Lösung vom Quadranten abhängt. Der beste Weg ist das Problem anhand einer Skizze zu studieren.

Bemerkungen zu Polarkoordinaten:

(i) Negative Werte für φ entsprechen positiven Winkeln im Uhrzeigersinn (wieder gemessen von der Abszisse aus). Zum Beispiel der Punkt mit kartesischen Koordinaten $(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ kann in Polarkoordinaten durch $(r, \varphi) = (2, 7\pi/4)$ aber auch durch $(r, \varphi) = (2, -\pi/4)$ beschrieben werden.

(ii) Die Winkel eines Punktes sind nur bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmt, i.e. die Koordinaten (r, φ) und $(r, \varphi + k2\pi)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ beschreiben die selben Punkte.

0.3.3. *Polarform.* Nun betrachten wir eine komplexe Zahl geschrieben in der Normalform, i.e. $z = x + yj$. Stellt man z in der komplexen Ebene dar, so sind x, y die kartesischen Koordinaten. Ausgedrückt durch Polarkoordinaten haben wir $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$. Nun setzen wir diese Ausdrücke in die Normalform ein und nennen den erhaltenen Ausdruck *Polarform* einer komplexen Zahl:

$$z = r\left(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right).$$

Im Zusammenhang mit komplexen Zahlen nennt man den Winkel φ das *Argument* von z, abgekürzt: $\arg(z)$. Beispielsweise ist $z = -3 + 3j$ in Polarform durch $z = \sqrt{18}\left(\cos(\frac{3}{4}\pi) + j\sin(\frac{3}{4}\pi)\right)$ gegeben.

0.3.4. *Multiplikation und Division.* Seien z_1, z_2 zwei komplexe Zahlen gegeben in Polarform:

$$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + j\sin(\varphi_1)), \qquad z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + j\sin(\varphi_2)).$$

Das Produkt dieser zwei Zahlen ist gegeben durch:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big).$$

Der Betrag des Produktes ist also gleich dem Produkt der Beträge, i.e. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ und das Argument des Produktes ist gleich der Summe der Argumente, i.e. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Die Division ist gegeben durch:

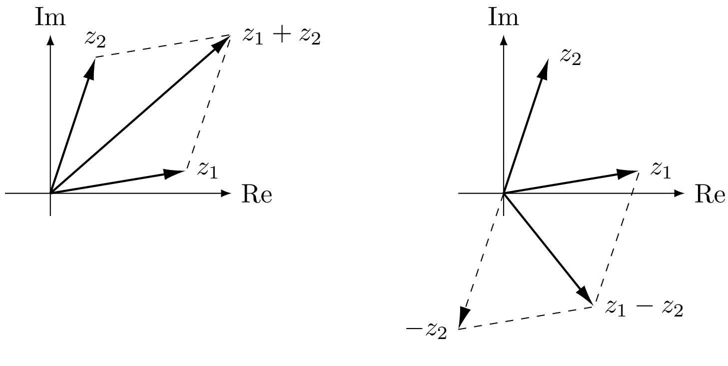
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Der Betrag des Quotienten ist also gleich dem Quotienten der Beträge, i.e. $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ und das Argument ist die Differenz der Argumente, i.e. $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

0.3.5. *Bemerkung.* Die Formeln für die Addition und Subtraktion sind anschaulich in kartesischen Koordinaten, i.e. in der Normalform:

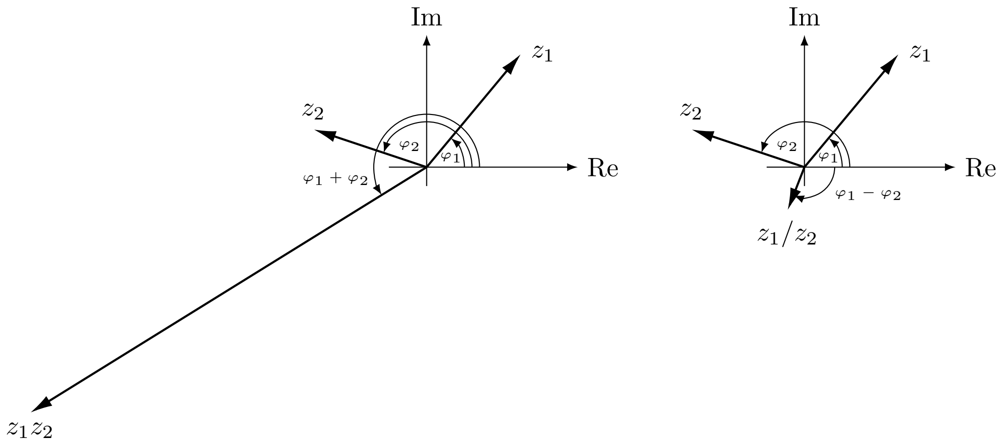
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)j, \\ z_1 - z_2 &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)j. \end{aligned}$$

Wir sehen an diesen Formeln dass die Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen in der komplexen Ebene identisch ist mit der Addition und Subtraktion von Vektoren.



Die Formeln für die Multiplikation und Division sind anschaulich in Polarkoordinaten, i.e. in der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big). \end{aligned}$$



Entsprechende Rechenoperationen sollten somit in der entsprechenden Form durchgeführt werden.

0.4. **Exponentialform.** Die Betrachtung beginnt mit der *Eulerschen Formel*

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi).$$

Da $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ beide 2π-periodisch sind gilt $e^{j\varphi} = e^{j(\varphi+2\pi k)}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Mit der Eulerschen Formel können wir eine komplexe Zahl $z = r(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$ umschreiben in

$$z = re^{j\varphi}.$$

Dies ist die *Exponentialform* einer komplexen Zahl. Beispiele:

z Normalform	z Exp.Form	$\overline{z}$ Exp.Form
1	1	1
$1+j$	$\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$
j	$e^{j\frac{\pi}{2}}$	$e^{-j\frac{\pi}{2}}$
-1	$e^{j\pi}$	$e^{j\pi}$

0.4.1. *Multiplikation/Division.* Sei $z_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$. Es gilt

$$z_1 z_2 = r_1 e^{j\varphi_1} r_2 e^{j\varphi_2} = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

0.4.2. *Potenzen Wurzeln.* Sei $z = re^{j\varphi}$. Es gilt

$$z^n = \left(re^{j\varphi}\right)^n = r^n e^{jn\varphi},$$
$$z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{j\varphi}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(re^{j(\varphi+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{j\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}, \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

0.4.3. *Exponentialfunktion.* Wir definieren nun die *Exponentialfunktion* einer komplexen Zahl auf die folgende natürliche Weise: Sei $z = x + jy$, dann gilt

$$\begin{aligned} e^z = e^{x+jy} &= e^x e^{jy} \\ &= e^x(\cos(y) + j\sin(y)). \end{aligned}$$

Wir sehen dass $|e^z| = e^x$ und $\arg(e^z) = y$.

0.4.4. *Kosinus- und Sinusfunktion.* Wir setzen voraus, dass die Eulersche Formel für alle komplexen Zahlen z gilt:

$$e^{jz} = \cos(z) + j\sin(z).$$

Wenn wir z mit $-z$ ersetzen, erhalten wir mit den üblichen Rechenregeln

$$e^{-jz} = \cos(z) - j\sin(z).$$

Diese beiden Gleichungen können wir nun als Gleichungssystem für *Kosinus* und *Sinus* betrachten. Auflösen ergibt

$$\cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}.$$

0.5. **Komplexe Wechselstromrechnung.** In gewissen Anwendungen ist die Darstellung von physikalischen Grössen durch komplexe Funktionen praktisch. Ein wichtiges Beispiel dafür tritt in der Elektrotechnik bei der Berechnung von Wechselstromkreisen, bestehend aus linearen Komponenten, auf. Im folgenden machen wir eine Einführung in dieses Gebiet. Wir betrachten Schaltkreise mit Ohmschen Widerständen (R), Spulen (L) und Kondensatoren (C). Man nennt diese Schaltkreise RLC-Schaltkreise.

0.5.1. *Wechselstrom.* Vorausgesetzt ist ein *Wechselstrom* $I(t)$ (also eine Funktion (der fliessende Strom) in Abhängigkeit der Zeit), der in einem Schaltkreis fliesst. Wir können diesen schreiben als

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_i).$$

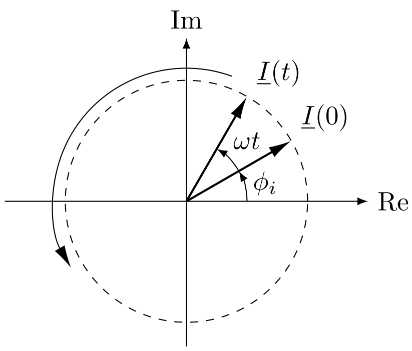
Hier ist I_0 die *Amplitude*, $\omega > 0$ die *Winkelfrequenz* und ϕ_i die *Phase*. Die Relation zwischen Winkelfrequenz, *Frequenz* f und *Periodendauer* T ist $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Die grundlegende Idee ist es nun diesen Strom $I(t)$ (welcher eine reelle Funktion ist) als den Realteil einer komplexen Funktion aufzufassen. Diese komplexe Funktion ist

$$\underline{I}(t) = I_0\Big(\cos(\omega t + \phi_i) + j\sin(\omega t + \phi_i)\Big).$$

(Wir verwenden die Notation mit der Unterstreichung um bei Grössen die sowohl komplex als auch reell vorkommen zu unterscheiden). Man sieht also dass $I(t) = \mathrm{Re}(\underline{I}(t))$. Wichtig ist dass nur der Realteil der komplexen Grösse $\underline{I}(t)$ eine physikalische Bedeutung hat, der Imaginärteil wurde lediglich aus rechentechnischen Gründen hinzugefügt. Wir verwenden im folgenden wann immer möglich die Exponentialform, i.e. $\underline{I}(t) = I_0 e^{(\omega t + \phi_i)j}$.

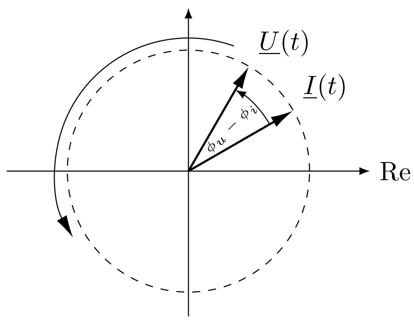
Wir sehen dass $|\underline{I}(t)| = I_0$ und $\arg(\underline{I}(t)) = \omega t + \phi_i$. Somit ist also der Betrag konstant und das Argument wächst linear mit der Zeit. In der komplexen Ebene entspricht $\underline{I}(t)$ also einem rotierenden Zeiger mit gleichbleibender Länge. Der Startpunkt zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Zeiger $\underline{I}(0) = I_0 e^{\phi_i j}$. Aus diesem Grund nennt man ϕ_i auch Nullphasenwinkel.



0.5.2. *Wechselspannung.* Die gleiche Idee verwenden wir nun um die Spannung darzustellen. Eine *Wechselspannung* ist durch die Funktion $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_u)$ gegeben. Die Wechselspannung besitzt die selbe Kreisfrequenz ω, aber die Amplitude U_0 und den Phasenwinkel ϕ_u. Genau wie beim Strom fassen wir nun diese Wechselspannung als Realteil einer komplexen Funktion auf. Diese komplexe Funktion ist

$$\underline{U}(t) = U_0\Big(\cos(\omega t + \phi_u) + j \sin(\omega t + \phi_u)\Big).$$

Man sieht also dass $U(t) = \mathrm{Re}(\underline{U}(t))$. Auch hier verwenden wir wann immer möglich die Exponentialform: $\underline{U}(t) = U_0 e^{(\omega t+\phi_u)j}$. In der komplexen Ebene ist die Spannung $\underline{U}(t)$ ebenfalls ein rotierender Zeiger. Die Rotationsgeschwindigkeit ist die selbe wie die des Stromes, im allgemeinen gilt aber $\phi_u \neq \phi_i$ und somit sind die Zeiger um den Winkel $\phi_u - \phi_i$ relativ zueinander gedreht. Der Winkel zwischen den Zeigern ändert sich aber nicht in Abhängigkeit der Zeit.



0.5.3. *Impedanz Z.* Aus der Berechnung von Gleichströmen kennen wir das Gesetz $R = \frac{U}{I}$. Ein analoges Gesetz gilt für die Berechnung von Wechselströmen. Hier definiert man die *Impedanz Z* durch

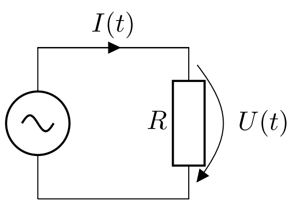
$$Z = \frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)}.$$

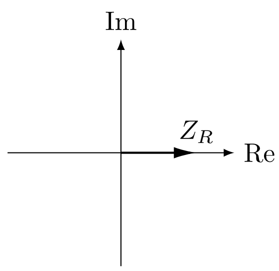
In der komplexen Wechselstromrechnung übernimmt also Z die Rolle des Widerstandes. Allgemein ist Z eine komplexe Zahl. Sie hängt aber nicht von der Zeit ab, weil

$$Z = \frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)} = \frac{U_0 e^{(\omega t+\phi_u)}}{I_0 e^{(\omega t+\phi_i)j}} = \frac{U_0}{I_0} e^{(\phi_u-\phi_i)j}.$$

Somit gilt $\arg(Z) = \phi_u - \phi_i$ und $|Z| = |\underline{U}|/|\underline{I}| = U_0/I_0$. Im folgenden werden wir die Impedanz Z für die verschiedenen Bauteile angeben.

0.5.4. *Ohmscher Widerstand.* Wir betrachten einen Schaltkreis in welchem ein *Ohmscher Verbraucher* mit *Widerstand R* an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen ist.

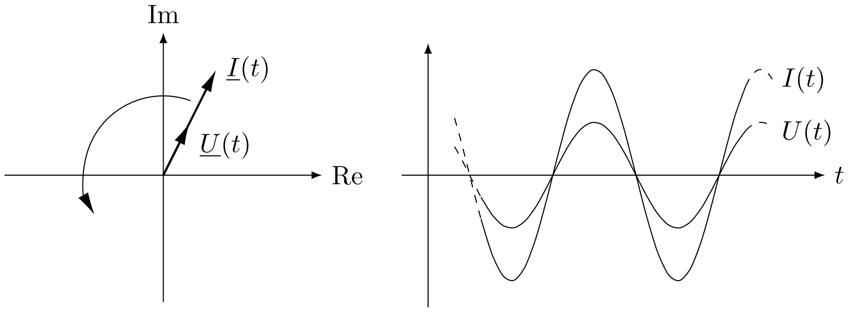




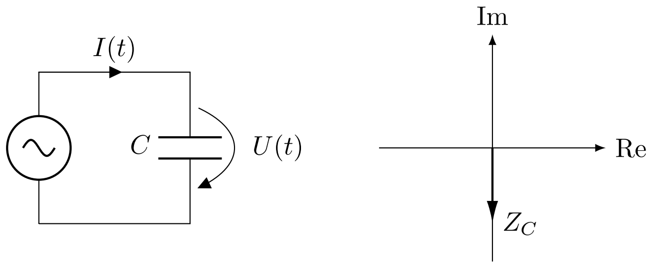
Es gilt

$$Z_R = R.$$

(wir verwenden hier einen Index R um diese Impedanz von den Impedanzen des Kondensators (Index C) und der Spule (Index L) zu unterscheiden). Die Begründung dieses Zusammenhanges (und die weiter unten folgenden) erfordert eine physikalische Betrachtung welche wir nicht ausführen. In Fall eines Ohmschen Widerstandes ist Z also eine reelle Zahl grösser gleich Null, i.e. $Z_R \in \mathbb{R}$ und $Z_R \geq 0$. In der komplexen Ebene liegt der Zeiger von Z_R also auf der positiven reellen Achse, i.e. $\phi_u - \phi_i = 0$. Es folgt nun aus $\underline{U}(t) = Z_R \underline{I}(t)$ dass die Zeiger von Strom $\underline{I}(t)$ und Spannung $\underline{U}(t)$ aufeinander liegen. Die physikalischen Grössen $I(t)$ und $U(t)$ haben ihre Maxima und Nulldurchgänge zur selben Zeit. Man sagt Strom und Spannung sind *in Phase*.



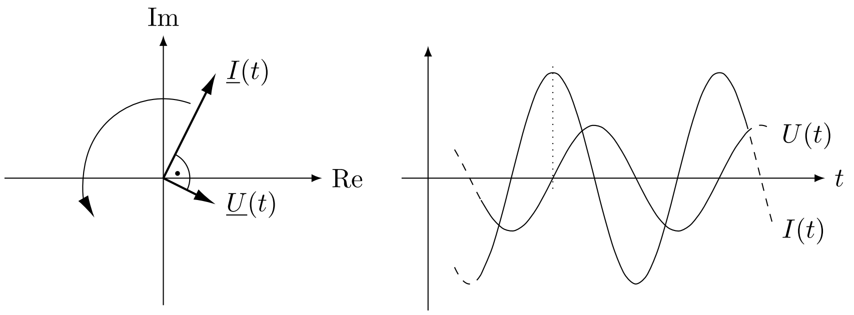
0.5.5. *Kapazität.* Wir betrachten einen Schaltkreis in welchem ein *Kondensator* mit Kapazität C an eine Wechselspannungsquelle $I(t)$angeschlossen ist.



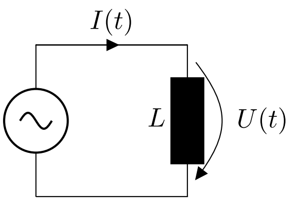
Es gilt

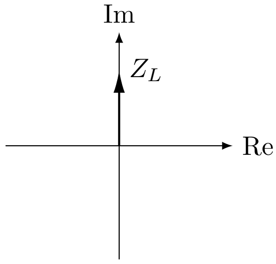
$$Z_C = -\frac{j}{\omega C}.$$

Die Impedanz ist rein imaginär und liegt auf der negativen imaginären Achse. Wir wissen dass eine Multiplikation mit $-j$ in der komplexen Ebene einer Rotation um $-\pi/2$ entspricht. Aus $\underline{U}(t) = Z_R \underline{I}(t)$ folgt somit dass der Zeiger des Stromes $\underline{I}(t)$ gegenüber dem Zeiger der Spannung $\underline{U}(t)$ um $\pi/2$ gedreht ist. Die Nulldurchgänge und Maxima des Stromes $I(t)$ erfolgen also zeitlich gesehen früher als die Nulldurchgänge und Maxima der Spannung. Man sagt der Strom eilt der Spannung voraus.



0.5.6. *Induktivität.* Wir betrachten einen Schaltkreis in welchem eine *Spule* mit *Induktivität* L an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen ist.

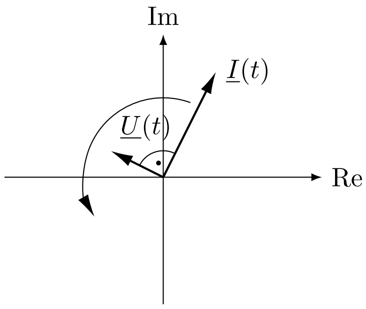


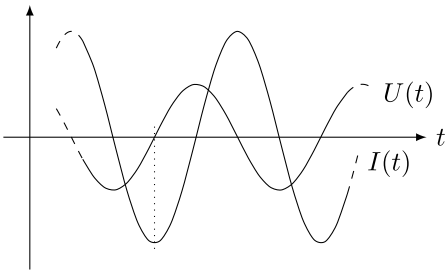


Es gilt

$$Z_L = \omega L j.$$

Die Impedanz ist wieder rein imaginär, liegt aber auf der positiven imaginären Achse. Wir wissen dass eine Multiplikation mit j in der komplexen Ebene einer Rotation um $\pi/2$ entspricht. Aus $\underline{U}(t) = Z_R \underline{I}(t)$ folgt somit dass der Zeiger der Spannung $\underline{U}(t)$ gegenüber dem Zeiger des Stromes $\underline{I}(t)$ um $\pi/2$ gedreht ist. Die Nulldurchgänge und Maxima der Spannung $U(t)$ erfolgen also zeitlich gesehen früher als die Nulldurchgänge und Maxima des Stromes $I(t)$. Man sagt die Spannung eilt dem Strom voraus.





0.5.7. *Serie- und Parallelschaltung.* Sind zwei Impedanzen Z_1 und Z_2 seriell geschaltet so ergibt sich eine totale Impedanz Z von $Z = Z_1 + Z_2$. Sind zwei Impedanzen Z_1 und Z_2 parallel geschaltet so ergibt sich die totale Impedanz Z aus $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$.

0.5.8. *Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand.* Der *Wirkwiderstand* ist gegeben durch $\mathrm{Re}(Z)$, der *Blindwiderstand* durch $\mathrm{Im}(Z)$ und der *Scheinwiderstand* durch $|Z|$.

0.5.9. *Beispiel.* Wir betrachten als Beispiel einen Schaltkreis in welchem ein Ohmscher Verbraucher mit Widerstand R, eine Spule mit Induktivität L und ein Kondensator mit Kapazität C seriell an eine Wechselspannungsquelle angeschlossen sind. Die totale Impedanz ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} Z &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= R + \omega L j - \frac{j}{\omega C} \\ &= R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) j. \end{aligned}$$

Daraus lässt sich nun die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung, $\phi_u - \phi_i$, berechnen. Sie ist gegeben durch die folgende Gleichung

$$\tan(\phi_u - \phi_i) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Weiter ist der Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand

$$\mathrm{Re}(Z) = R,$$
$$\mathrm{Im}(Z) = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$
$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

1. Übungen

Übung 1

Löse die Gleichungen und schreibe die Lösungen in Normalform.

(i) $x^2 - 4 = 0$
(ii) $x^2 + 9 = 0$
(iii) $x^2 - 4x + 13 = 0$
(iv) $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und
a) $b^2 - 4ac > 0$ b) $b^2 - 4ac < 0$.

Übung 2

Bestimme den Real- und Imaginärteil von

(i) $z = 83$
(ii) $z = 12 + 14j$
(iii) $z = j$
(iv) $z = (2 + 3j) + (1 - 2j)j$
(v) $z = 7(2 + j)$

Übung 3

Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Normalform

(i) $z = \frac{2 + 3j}{2j}$
(ii) $z = \frac{2 - 3j}{-1 + j}$
(iii) $z = \frac{1}{j}$
(iv) $z = j^7$
(v) $z = (-j)^2$

Übung 4

(i) Seien a und b reelle Zahlen und $7a + j(3a - b) = 14 - 6j$. Bestimme die Werte von a und b.

Übung 5

(i) Sei z eine komplexe Zahl. Zeigen sie

$$\text{a)} \quad z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z), \qquad \text{b)} \quad z - \overline{z} = 2j\mathrm{Im}(z).$$

Übung 6

Zeichnen sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen/Ungleichungen in die komplexe Ebene.

(i)	$\lvert z\rvert = 3$	(iv)	$\lvert z+2j\rvert = 3$
(ii)	$\lvert z-2\rvert = 3$	(v)	$\lvert z-2+j\rvert = 3$
(iii)	$\lvert z+1\rvert = 3$	(vi)	$\lvert z-2+j\rvert \geq 3$

Übung 7

Seien z, z_1 und z_2 komplexe Zahlen. Man zeige

(i) $|\overline{z}| = |z|$
(ii) $z\overline{z} = |z|^2$

Übung 8

(i) Skizziere die folgenden Zahlen in die der komplexen Ebene (Zeigerdarstellung): $z_1 = -3+2j$, $z_2 = 4$, $z_3 = -5j$, $z_4 = 3-2j$.
(ii) Skizziere jeweils die konjugiert komplexe Zahl der folgenden Zahlen in der komplexen Ebene (Zeigerdarstellung): $z_1 = 3+2j$, $z_2 = -5-3j$, $z_3 = -2j$, $z_4 = 5-j$, $z_5 = -3+2j$, $z_6 = 4j$, $z_7 = -2-4j$, $z_8 = 8$.
(iii) Berechne $|3+2j|$, $|-3+4j|$, $|6j|$, $|-3|$.

Übung 9

Man schreibe die folgenden komplexen Zahlen in Polarform

(i) $z = -1+\sqrt{3}j$
(ii) $z = -9$
(iii) $z = 12j$

Übung 10

(i) Man skizziere in der Gaussschen Ebene die folgenden Zahlen und berechne sowohl deren Betrag als auch deren Argument.

$$z_1 = 2+3j, \qquad z_2 = -2+3j, \qquad z_3 = -2-3j, \qquad z_4 = 2-3j.$$

(ii) Man finde die kartesische Form und zeichne in der Gaussschen Ebene die komplexen Zahlen mit Betrag $\sqrt{2}$ und den Argumenten

$$\varphi_1 = \frac{1}{4}\pi, \qquad \varphi_2 = \frac{3}{4}\pi, \qquad \varphi_3 = \frac{5}{4}\pi, \qquad \varphi_4 = \frac{7}{4}\pi.$$

Übung 11

(i) Man berechne das Produkt der komplexen Zahl $z = 3+2j$ mit der komplexen Zahl j mittels Polarkoordinaten und interpretiere das Resultat geometrisch.
(ii) Man berechne den Quotienten der komplexen Zahl $z = 3+2j$ mit der komplexen Zahl $-2j$ unter Verwendung von Polarkoordinaten und interpretiere das Resultat geometrisch.

Übung 12

Man bestimme Betrag und Argument von $z_1 = \sqrt{3}+j$ und $z_2 = 4+4j$. Man drücke $z_1 z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ in polarer Form aus.

Übung 13

Man stelle in Exponentialform dar: (i) $2e^{j(3+5j)}$, (ii) $(2-2j)e^{\frac{\pi}{4}j}$, $-5e^{\frac{\pi}{3}j}$.

Übung 14

Sei $z_1 = 3e^{\frac{\pi}{2}j}$, $z_2 = 4e^{\frac{\pi}{3}j}$. Man schreibe in Normalform: (i) $z_1 z_2$, (ii) $\frac{z_1}{z_2}$ und (iii) $z_1 + z_2$.

Übung 15

Man bestimme den Betrag und das Argument von (i) $-j$, (ii) -3, (iii) $1+j$, (iv) $\cos(\theta) + j\sin(\theta)$ und schreibe die Zahlen in expnentieller Form.

Übung 16

Man zeige die Formel $e^{\omega tj} + e^{-\omega tj} = 2\cos(\omega t)$ und man finde einen ähnlichen Ausdruck für $e^{\omega tj} - e^{-\omega tj}$.

Übung 17

Man schreibe $z_1 = 1 - j$ und $z_2 = \frac{7+3\sqrt{3}j}{\sqrt{3}+4j}$ in Exponentialform.

Übung 18

Man berechne die folgenden komplexen Quantitäten:

(i) $\exp(-2t + jt)$, $t \in \mathbb{R}$
(ii) $\sin(j)$

Übung 19

In einem Schaltkreis sind ein Widerstand $R = 10\,\Omega$ und eine Kapazität $C = 40\,\mu\mathrm{F}$ in Serie geschaltet. Es wird eine Spannung von $U(t) = 500\cos(2500t - \frac{\pi}{9})\,\mathrm{V}$ angelegt. Man berechne den Strom im Schaltkreis.

Übung 20

Eine Kapazität $C = 25\,\mu\mathrm{F}$ wird mit einem Widerstand R in Serie geschaltet und durch eine Quelle mit $f = 60\,\mathrm{Hz}$ gespiesen. Der Strom ist gegenüber der Spannung um den Winkel $\pi/4$ voraus. Man berechne den Wert des Widerstandes R.

Übung 21

Eine Spannung von $U(t) = 200\sin(300t + \frac{\pi}{2})\,\mathrm{V}$ wirkt auf einen Schaltkreis welcher aus einer Serieschaltung eines Widerstandes $R = 8\,\Omega$ und einer Spule mit $L = 0.02\,\mathrm{H}$ besteht. Man berechne den Strom im Schaltkreis. Hinweis: Es gilt $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$.

2. Lösungen zu den Übungen

Lösung zu Übung 1

(i) $x = \pm 2$
(ii) $x = \pm 3j$

(iii) $x = 2 \pm 3j$

(iv) Die Lösung ist durch die Lösungsformel gegeben: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
a) In diesem Fall ist die Wurzel in der Lösungsformel reell, die Lösung besitzt also keinen Imaginärteil und ist somit bereits in der Normalform.
b) Wir schreiben den Wurzelterm um: $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(-1)(4ac - b^2)} = \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}$. Das Argument der zweiten Wurzel ist nun $4ac - b^2 > 0$ und somit ist diese Wurzel reell. Wir erhalten $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} j$.

Lösung zu Übung 2

(i) $\mathrm{Re}(z) = 83, \quad \mathrm{Im}(z) = 0$
(ii) $\mathrm{Re}(z) = 12, \quad \mathrm{Im}(z) = 14$
(iii) $\mathrm{Re}(z) = 0, \quad \mathrm{Im}(z) = 1$
(iv) $\mathrm{Re}(z) = 4, \quad \mathrm{Im}(z) = 4$
(v) $\mathrm{Re}(z) = 14, \quad \mathrm{Im}(z) = 7$

Lösung zu Übung 3

(i) $z = \frac{3}{2} - j$
(ii) $z = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}j$
(iii) $z = -j$
(iv) $z = -j$
(v) $z = -1$

Lösung zu Übung 4

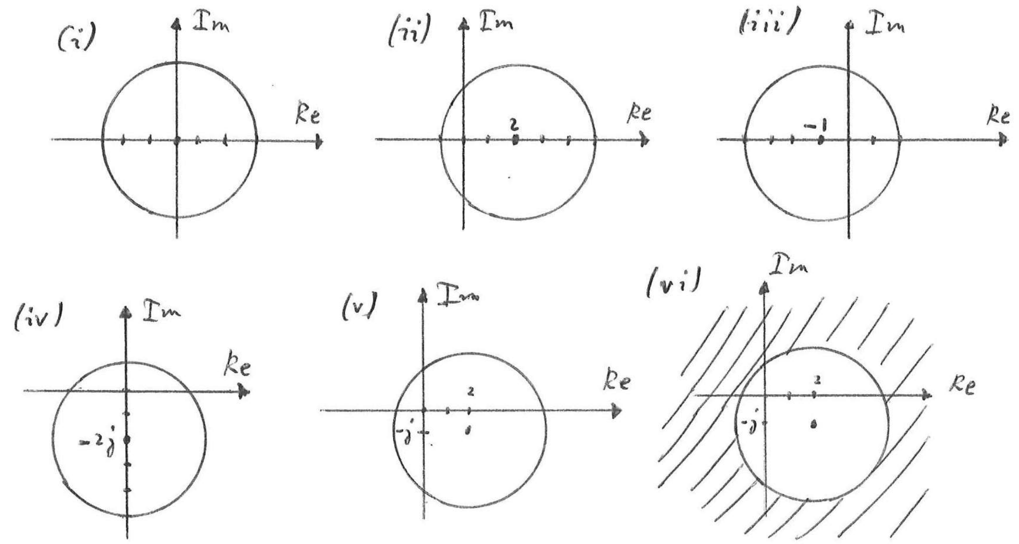
(i) $a = 2$, $b = 12$

Lösung zu Übung 5

(i) z ist eine komplexe Zahl und kann somit als $z = x + yj$ mit $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$ geschrieben werden (Normalform). Wir haben $\overline{z} = x - yj$. Somit gilt

$$z + \overline{z} = x + yj + (x - yj) = 2x = 2\mathrm{Re}(z),$$
$$z - \overline{z} = x + yj - (x - yj) = 2yj = 2j\mathrm{Im}(z).$$

Lösung zu Übung 6



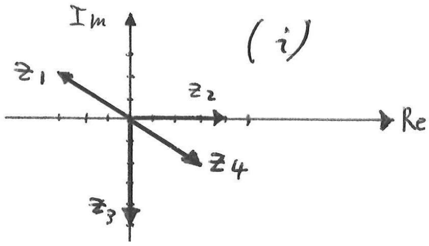
Lösung zu Übung 7

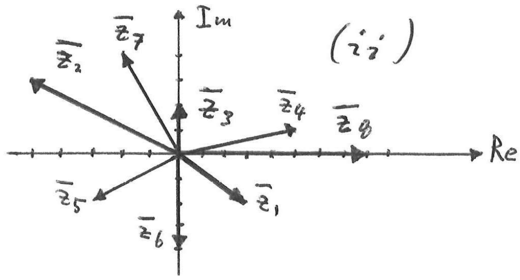
Seien die betrachteten komplexen Zahlen gegeben durch: $z = x + yj$, $z_1 = x_1 + y_1 j$ und $z_2 = x_2 + y_2 j$.

(i) $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

(ii) $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

Lösung zu Übung 8





(iii) $\sqrt{13}$, 5, 6, 3.

Lösung zu Übung 9

(i) $z = 2(\cos(2\pi/3) + j\sin(2\pi/3))$

(ii) $z = 9(\cos(\pi) + j\sin(\pi))$

(iii) $z = 12(\cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2))$

Lösung zu Übung 10

(i) Wir lassen die Skizze weg. $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \sqrt{13}$, $\arg(z_1) = \arctan(\frac{3}{2})$, $\arg(z_2) = \pi - \arctan(\frac{3}{2})$, $\arg(z_3) = \pi + \arctan(\frac{3}{2})$, $\arg(z_4) = 2\pi - \arctan(\frac{3}{2})$.

(ii) Wir lassen die Skizze weg. Die Zahlen sind $z_1 = 1 + j$, $z_2 = -1 + j$, $z_3 = -1 - j$, $z_4 = 1 - j$.

Lösung zu Übung 11

(i) Man erhält $(3 + 2j)j = -2 + 3j$. Die Multiplikation mit j entspricht somit einer Drehung um den Winkel $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn (was einem positiven Drehsinn entspricht).

(ii) Man erhält $\frac{3+2j}{-2j} = -1 + \frac{3}{2}j$. Der Zeiger wird wieder um $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Die Länge des Zeigers ist um einen Faktor 2 kleiner. Wegen $\frac{1}{-2j} = \frac{j}{2}$ kann man die Operation als Multiplikation mit $\frac{j}{2}$ verstehen.

Lösung zu Übung 12

$|z_1| = 2$, $\arg(z_1) = \pi/6$, $|z_2| = 4\sqrt{2}$, $\arg(z_2) = \pi/4$

$z_1 z_2 = 8\sqrt{2}(\cos(5\pi/12) + j\sin(5\pi/12))$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos(-\pi/12) + j\sin(-\pi/12))$

Lösung zu Übung 13

(i) $2e^{-5}e^{3j}$, (ii) $2\sqrt{2}$, (iii) $5e^{\frac{4\pi}{3}j}$.

Lösung zu Übung 14

(i) $z_1 z_2 = -6\sqrt{3} + 6j$, (ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{8}\sqrt{3} + \frac{3}{8}j$, (iii) $z_1 + z_2 = 2 + (3 + 2\sqrt{3})j$.

Lösung zu Übung 15

z	$\lvert z\rvert$	$\arg(z)$	Exp. Form
$-j$	1	$\frac{3\pi}{2}$	$e^{\frac{3\pi}{2}j}$
-3	3	π	$3e^{\pi j}$
$1+j$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}$
$\cos(\theta) + j\sin(\theta)$	1	θ	$e^{\theta j}$.

Lösung zu Übung 16

Beides direkt aus den Formeln für den Kosinus und den Sinus.

Lösung zu Übung 17

$z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}j}$, $2e^{-\frac{\pi}{6}j}$.

Lösung zu Übung 18

(i) $e^{-2t}\cos(t) + e^{-2t}\sin(t)j$
(ii) $\frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})j$

Lösung zu Übung 19

Der Strom ist $I(t) = 25\sqrt{2}\cos(2500t + \frac{5\pi}{36})\,\mathrm{A}$.

Lösung zu Übung 20

$\frac{1000}{3\pi}\,\Omega \approx 106\,\Omega$.

Lösung zu Übung 21

$I(t) = 20\sin(300t + \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{3}{4}))\,\mathrm{A}$.