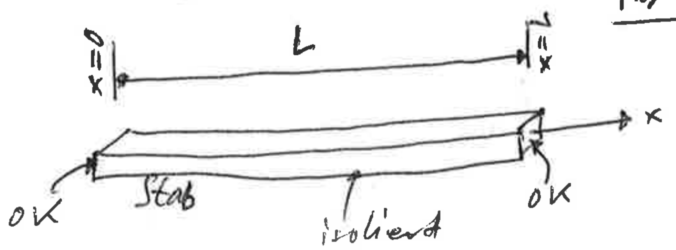
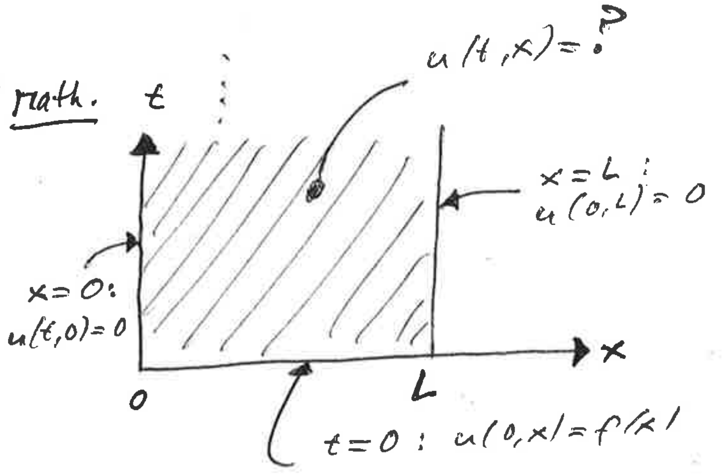
Wärmeleitungsgleichung

Phys. | Math.





Anfangstemp.: $u(0,x) = f(x)$ ← gegeben

$u(t,x)$ erfüllt part. DGL:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad (0)$$

Temp. — u; Material — a^2

$\Downarrow$

Anfangs / Randwertproblem:

$$(*)\quad\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{DGL} \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \text{Randbed.} \\ u(0,x) = f(x) & \text{Anfangsbed.} \end{cases}$$

Idee für Lösg. von $(*)$: Ansatz: $u(t,x) = T(t)X(x)$ (ein Produkt!!)

Ansatz in $(0) \longrightarrow \dfrac{T'}{a^2 T} = \dfrac{X''}{X} = \lambda$ ← unbekannte Konstante

Dies sind zwei gewöhnliche DGL:

$$(i)\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = X(L) = 0 \quad \text{Randbed.} \end{cases}$$

Lösg: $\lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$

$X_n(x) = B_n \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$

(ii) $T' = a^2 \lambda T$ (Anfangsbed. siehe unten)

Lösg: $T_n(t) = D_n \exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}\right)$

$(C_n = B_n D_n)$

$\longrightarrow u_n(t,x) = T_n(x) X_n(x)$
$= C_n \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}\right)$ ist Lösg. von (0)

$$\longrightarrow u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}\right)$$ ist Lösg. von (0)

Betrachten jetzt Anfangsbed.: $u(0,x) = f(x)$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

$\longrightarrow$ C_n sind Fourierkoeff der Fourier-Sinusreihe von $f(x)$!!!

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Mit diesen C_n, $u(t,x)$ löst das Problem $(*)$.