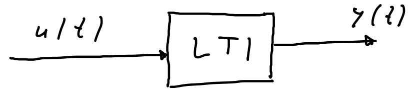
Nyquist Ortskurve

Erinnerung Frequenzantwort:



$u(t) = e^{j\omega t}$

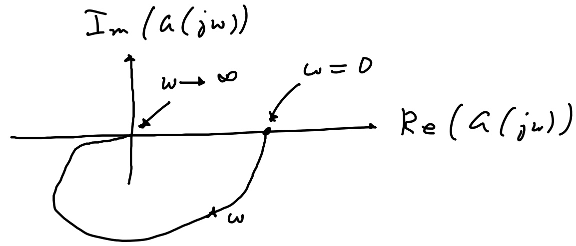
$y(t) = \underbrace{G(j\omega)}e^{j\omega t}$ (stationär, i.e. für grosse t !)

↳ komplexe Grösse, abhängig von reellen Parameter ω.

$$[0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\omega \longmapsto G(j\omega)$$

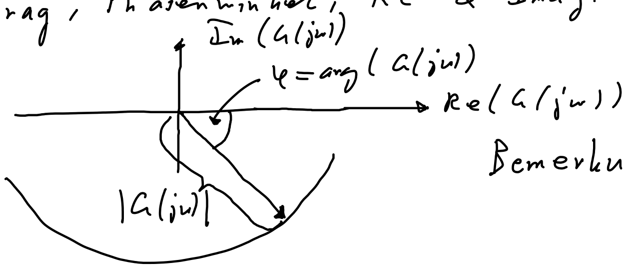
zugehörige Ortskurve heisst Nyquist Ortskurve. [Def.]

Bsp.: $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}$



Für jedes $\omega \in [0, \infty)$

kann Betrag, Phasenwinkel, Re- & Imag.-Teil abgelesen werden:



Bemerkung: in Literatur:
- φ in [°]
- $\varphi \in [-180°, 180°]$

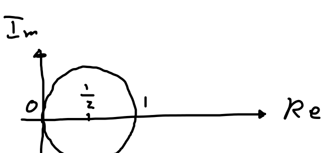
Aufgabe: Betrachten Hochpass, mit $R = C = 1 \longrightarrow G(s) = \frac{s}{s+1}$

Zu zeigen: Nyquist Ortskurve ist Halbkreis mit Radius $= \frac{1}{2}$ um Zentrum $(\frac{1}{2}, 0)$, in oberer Halbebene.

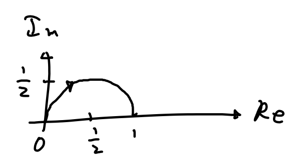
Lösg.: $$\left|G(j\omega) - \tfrac{1}{2}\right| = \left|\frac{j\omega}{j\omega+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2j\omega - j\omega - 1}{2(j\omega+1)}\right| = \left|\frac{j\omega - 1}{2(j\omega+1)}\right| = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{2\sqrt{\omega^2+1}} = \frac{1}{2}$$

→ Zentrum ✓, Radius ✓

$$G(j\omega) \xrightarrow{\omega \to 0} 0$$
$$G(j\omega) \xrightarrow{\omega \to \infty} 1$$



$$G(j) = \frac{j}{j+1} = \frac{j(1-j)}{(j+1)(1-j)} = \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$$



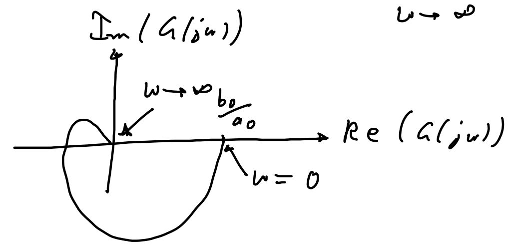
Typischer Anfang / Ende einer Ortskurve eines dyn. Systems

Sei $G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0}$ mit $b_0 \neq 0, a_0 \neq 0, n > m$

Anfang: $\omega = 0 \longrightarrow G(j0) = G(0) = \frac{b_0}{a_0} \in \mathbb{R}$

Ende: $\omega \to \infty$ Da $n > m$ $\longrightarrow$ $\lim_{\omega \to \infty} G(j\omega) = 0$

$\longrightarrow$ Typische Ortskurve:



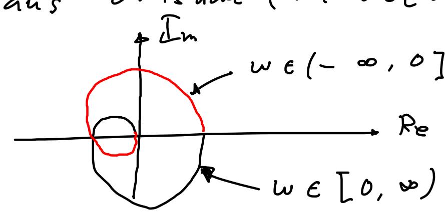
Bem: Tiefpass: $G(s) = \frac{sRC}{sRC+1}$ kein typisches dyn. System (Intuitiv: $L = 0$, i.e. hat keine "Masse").

Def.: Ortskurve zur Abb. $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\omega \longmapsto G(j\omega)$ heisst komplette Nyquist Ortskurve

Bem: Für rationale Transferfkt. $G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$

gilt: $G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}$

$\longrightarrow$ komplette Ortskurve ergibt sich aus Ortskurve (mit $\omega \in [0, \infty)$) durch Spiegelung an reellen Achse:



Prinzip vom Argument

Phasor-Form

Betrachten Fkt. $G: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $s \longmapsto G(s)$

wobei G rationale Fkt.:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

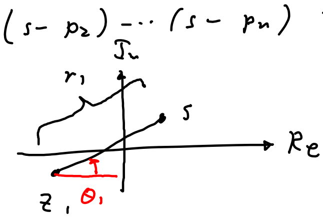
schreiben $G(s)$ um:

$$G(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

Polynome als Produkte von Lin.-Fakt.

schreiben nun:

$$s - z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$
$$s - p_1 = R_1 e^{j\phi_1}$$

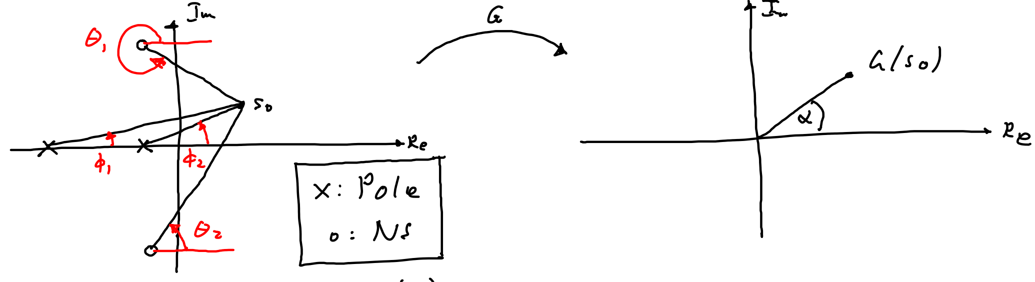


$$\longrightarrow G(s) = k \frac{r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} \cdots r_m e^{j\theta_m}}{R_1 e^{j\phi_1} R_2 e^{j\phi_2} \cdots R_n e^{j\phi_n}} = k \frac{r_1 r_2 \cdots r_m}{R_1 R_2 \cdots R_n} e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_n)}$$

Argumente von NS: +

" PS: −

Grafische Betrachtung:

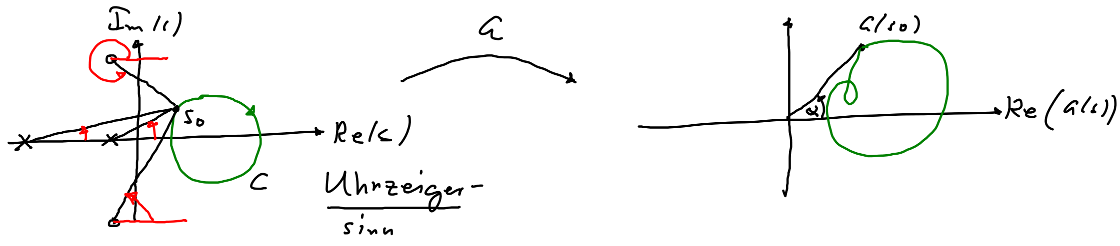


$$G(s_0) = k\,\frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2-\phi_1-\phi_2)}$$

$\longrightarrow$ $\underline{\alpha = \theta_1 + \theta_2 - \phi_1 - \phi_2}$

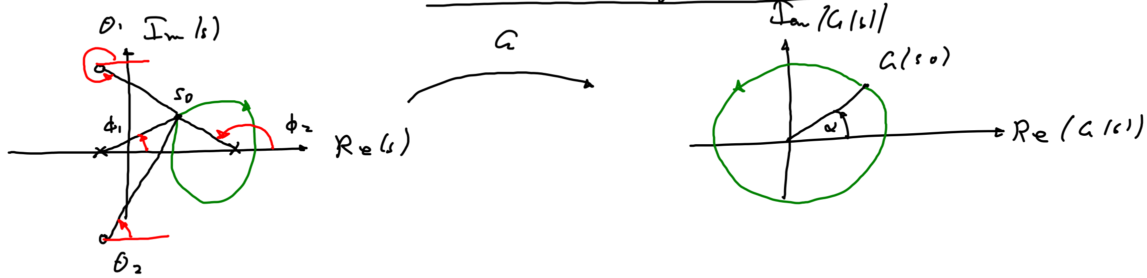
Betrachten nun geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ (Kontur) und das Bild davon (wieder in $\mathbb{C}$):

Situation (1):



α ändert sich wenn s C umläuft, aber am Ende wird α den selben Wert haben, insbesondere keine Änderung um 360°!

Situation (2):



$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 - \phi_1 - \phi_2$$

Anteile von $\theta_1, \theta_2, \phi_1$ kehren zu ursprünglichen Werten zurück.

Aber: ϕ_2 ändert sich um $-360°$

$\longrightarrow$ α ändert sich um 360° !

$\longrightarrow$ G(C) umläuft Ursprung einmal im Gegenuhrzeigersinn ||

$\longrightarrow$ Prinzip vom Argument:

Das Bild einer Kontur C umkreist den Ursprung $Z - P$ mal, wobei $Z = \#$ NS in C $P = \#$ PS in C

[wir zählen Umdrehungen im Uhrzeigersinn positiv]