Frequenzantwort

Betrachten LTI - System: $\xrightarrow{U(s)} \boxed{G(s)} \xrightarrow{Y(s)}$

Transferfkt: $G(s) = \dfrac{Z(s)}{N(s)}$ (Zähler) (Nenner)

Annahme: System stabil, i.e. NS von $N(s)$ besitzen neg. Realteil

Betrachten als Eingangsgrösse: $u(t) = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) = e^{j\omega t}$

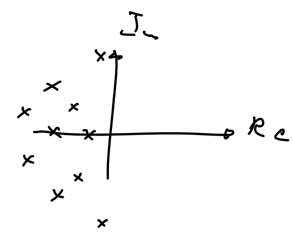
$\longrightarrow U(s) = \mathcal{L}(u(t)) = \dfrac{1}{s - j\omega}$

$Y(s) = G(s)\,U(s)$ ist Reaktion des Systems auf periodisches Signal mit Amplitude $= 1$ und Frequenz $= \omega$.

$$Y(s) = G(s)\,U(s) = \frac{Z(s)}{N(s)(s - j\omega)}$$

$N(s)$ als Lin. - Fakt.: $N(s) = (s - p_1)(s - p_2)\cdots$

mit $\mathrm{Re}(p_k) < 0$.



$\longrightarrow$ PBZ hat Form:

$$\frac{Z(s)}{N(s)(s - j\omega)} = \boxed{\frac{a}{s - j\omega}} + \underbrace{\sum_k \frac{b_k}{s - p_k}}_{= \text{Rest}} \quad (*)$$

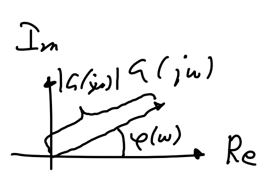
$$\mathcal{L}^{-1}(\text{Rest}) \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

$\longrightarrow$ Rest ist nur für "Einschwingvorgang" relevant!

Bestimmen von a:

$(*) \cdot (s - j\omega) \longrightarrow \dfrac{Z(s)}{N(s)} = a + (s - j\omega)\sum_k \cdots$

$s = j\omega \longrightarrow \underbrace{\dfrac{Z(j\omega)}{N(j\omega)}}_{= G(j\omega)} = a$



I.e.

$$\boxed{a = G(j\omega) = |G(j\omega)|\,e^{j\varphi(\omega)} \; ; \; \varphi = \arg(G(j\omega))}$$

$\longrightarrow$ Stationäres Verhalten $(t \to \infty)$

$$Y(s) = \frac{G(j\omega)}{s - j\omega} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = G(j\omega)\,e^{j\omega t} = |G(j\omega)|\,e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}$$

$(u(t) = e^{j\omega t})$

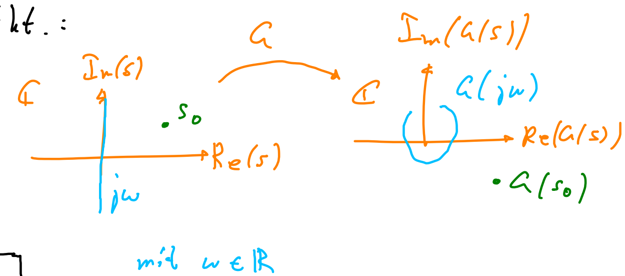
Wir sehen:

$$\left.\begin{array}{l} C(\omega) = |G(j\omega)| : \ \underline{\text{Verstärkungsfaktor}} \ (\text{Amplitude}) \\ \varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) : \ \underline{\text{Phasenverschiebung}} \end{array}\right\} \ \underline{\text{Frequenzgang}}$$

Bem.: Gesamte Info über stationäres Verhalten ist in komplexwertigen Fkt.:

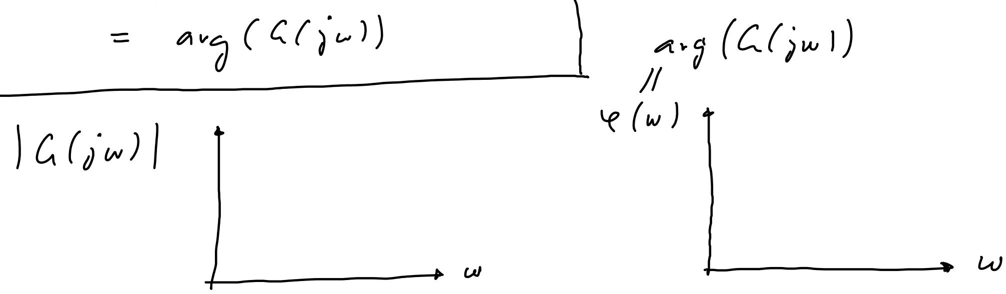
$$\omega \longmapsto G(j\omega)$$

mit reellem Argument enthalten.



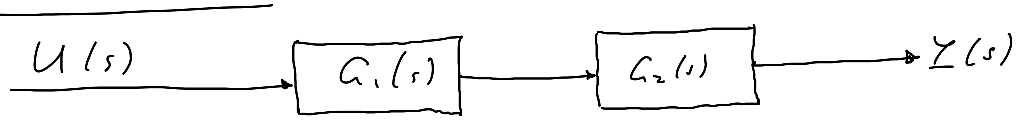
> Frequenzgang eines LTI-Systems wird beschrieben durch Transferfkt. $G(s)$ entlang imaginären Achse: $s = j\omega$
>
> Amplitude $= |G(j\omega)|$
>
> Phase $= \arg(G(j\omega))$

Bode-Plots:



Standard ist:
- Log-Skala für ω
- dB-Skala für $|G(j\omega)|$, i.e. $20 \log_{10}(|G(j\omega)|)$
- φ in [°]

Serieschaltung / Bodeplots:



$\longrightarrow \ G(s) = G_1(s)G_2(s)$

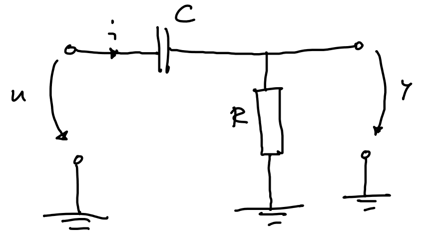
$\longrightarrow \ |G(s)| = |G_1(s)| \cdot |G_2(s)|$

$\longrightarrow \ \log_{10}|G(s)| = \log_{10}|G_1(s)| + \log_{10}|G_2(s)|$

$\arg(G(s)) = \arg(G_1(s)) + \arg(G_2(s))$

I.e. Bode-Plots des Gesamtsystems sind Summe der Bode-Plots der Teilsysteme

Bsp.: Hochpassfilter



Spannung an R: $u_R = y \longrightarrow i_R = \frac{y}{R}$

— " — C: $u_C = u - y$

$\quad \longrightarrow i_C = C \frac{d}{dt}(u - y)$

$i_C = i_R$

$\longrightarrow C \frac{d}{dt}(u - y) = \frac{y}{R}$

$\longrightarrow y' + \frac{1}{RC} y = u'$

$\xrightarrow{\mathcal{L}(..)} sY + \frac{1}{RC} Y = sU \longrightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$

$= \frac{sRC}{sRC + 1}$

Bode-Plots: $(R = 10^4 \,;\ C = 22 \cdot 10^{-6})$