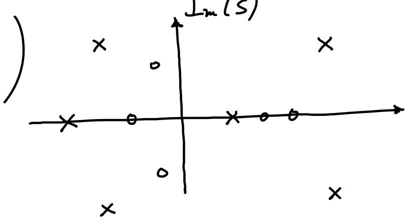
Pole & Nullstellen der Transferfkt.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = \frac{Z(s)}{N(s)} = k_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Polynome als Produkt von Lin.-Fakt.

$a_i, b_j \in \mathbb{R} \longrightarrow$ NS z_i & PS p_j sind:
- reell oder
- konj. komplex

(Pol-Nullstellen-plan)



p_j: ×
z_i: o

Annahme: $p_j \neq z_i$ i.e. Zähler & Nenner keine gemeinsamen NS.

Bem: Pole & NS bestimmen $G(s)$ (bis auf multiplikative Konst.)

Eigenverhalten

↳ Ist Verhalten eines Systems wenn $u(t) \equiv 0$ (i.e. Lösg. der hom. Gl.)

↳ DGL: $a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_0 y(t) = 0$

$\mathcal{L}(\dots) \longrightarrow$ $\underbrace{(a_n s^n + \dots + a_0)}_{= N(s)} Y(s) = A(s)$

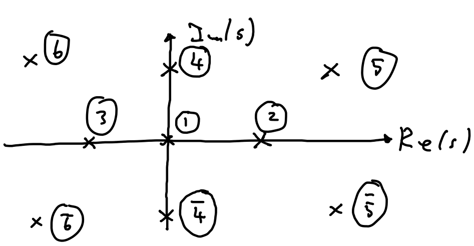
$N(s)$: (Nennerpolynom der Transferfkt.)

$A(s)$: Polynom aus Anfangsbed. (niedrigerer Ordnung als $N(s)$)

$\longrightarrow Y(s) = \dfrac{A(s)}{N(s)} \longrightarrow$ Polstellen von $Y(s)$ = Polstellen von $G(s)$

Für $y(t)$: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{A(s)}{N(s)}\right) \longrightarrow$ PBZ!

Lage der Pole $\longrightarrow$ Art der Zeitfkt.:



① $p = 0$ entspricht dem Partialbruch $\dfrac{A}{s}$

$\longrightarrow$ Im Zeitbereich: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{A}{s}\right) = \boxed{A}$ (Konstante)

② $p = \lambda > 0 \longrightarrow$ Partialbruch $\dfrac{A}{s-\lambda}$

$\longrightarrow$ Zeitbereich: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{A}{s-\lambda}\right) = \boxed{A e^{\lambda t}}$

③ $p = -\lambda < 0$ $(\lambda > 0)$ $\longrightarrow$ Partialbruch: $\dfrac{A}{s+\lambda}$

$\longrightarrow$ Zeitbereich: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{A}{s+\lambda}\right) = \boxed{A e^{-\lambda t}}$

④ $p_\pm = \pm j\omega \longrightarrow$ Partialbruch: $\dfrac{A + Bs}{s^2 + \omega^2}$

$\longrightarrow$ Zeitbereich: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{A + Bs}{s^2 + \omega^2}\right) = \boxed{C \sin(\omega t + \varphi)}$

⑤ $p_\pm = \lambda \pm j\omega \quad (\lambda > 0)$

$\longrightarrow$ Partialbruch: $\dfrac{A + Bs}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}$

$\longrightarrow$ Zeitbereich: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\ldots) = \boxed{C e^{\lambda t} \sin(\omega t + \varphi)}$

⑥ $p_\pm = -\lambda \pm j\omega \quad (\lambda > 0)$

$\longrightarrow$ Partialbruch: $\dfrac{A + Bs}{(s+\lambda)^2 + \omega^2}$

$\longrightarrow$ Zeitbereich: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\ldots) = \boxed{C e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi)}$

<u>Wir sehen:</u>

Sei p PS von $G(s)$:

$Re(p) = 0 \longrightarrow$ Zeitlich konst. Anteil

$Re(p) > 0 \longrightarrow$ —"— wachsender Anteil

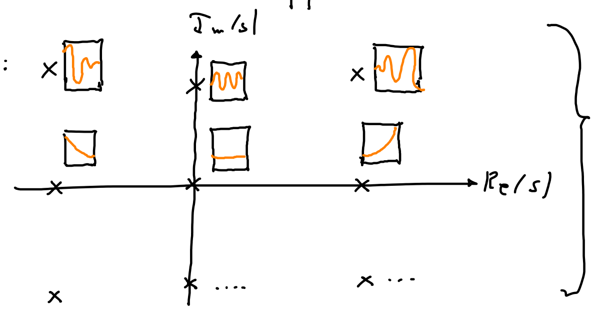
$Re(p) < 0 \longrightarrow$ —"— fallender Anteil

<u>Def.</u> LTI-System heisst <u>asymptotisch stabil</u>, falls aus $u(t) \equiv 0$ folgt:

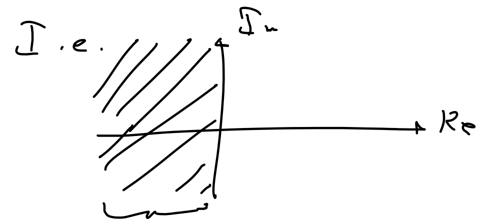
$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

für beliebige Anfangsbed. $y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$

Verhalten im Zeitbereich, qualitativ:



$\longrightarrow$ $\boxed{\text{LTI-System asymptot. stabil, genau dann wenn alle Polstellen von } G(s) \text{ negativen Realteil besitzen}}$



Im folgenden nennen wir System:

<u>stabil</u>, falls $Re(p_i) < 0$ für alle i

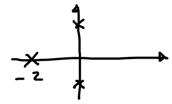
<u>instabil</u>, falls $Re(p_j) > 0$ für ein j

<u>bedingt stabil</u>, falls $Re(p_i) \leq 0$ für alle i

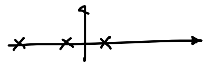
<u>Aufgabe:</u> Welche der folgenden Transferfkt. beschreiben stabile Systeme?

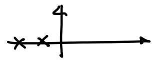
(i) $\dfrac{s-1}{(s+2)(s^2+4)}$ (ii) $\dfrac{(s+2)(s-2)}{(s+1)(s-1)(s+4)}$ (iii) $\dfrac{s-1}{(s+2)(s+4)}$ (iv) $\dfrac{6}{(s^2+s+1)(s+1)^2}$

Lösg.: (i) $s^2+4=0 \longrightarrow s = \pm 2j$
$s+2 = 0 \longrightarrow s = -2$

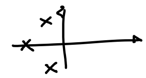


$\longrightarrow$ Bedingt stabil

(ii)  $\longrightarrow$ instabil

(iii)  $\longrightarrow$ stabil

(iv) $s^2+s+1=0 \longrightarrow s = \dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$

 $\longrightarrow$ stabil

Bem.: (i) Eigenverhalten (mit Anfangsbed., jedoch $u(t)\equiv 0$) bezüglich Stabilität ist äquivalent zur Impulsantwort:

$$u(t) = \delta(t) \longrightarrow U(s) = 1$$
$$\longrightarrow \underline{Y(s)} = G(s)U(s) = \underline{G(s)}$$

I.e. die selben Polstellen
$\longrightarrow$ gleiches Stabilitätsverhalten

phys. Asymptot. Stabilität bedeutet dass dem System versetzte Impulse mit der Zeit abklingen.

(ii) Stabilität LTI heisst:
Falls inhom. Lösg. ex. wird Lösg. dahin konvergieren

(iii) Gleichung: $a_n s^n + \dots + a_0 = 0$ (Gl. welche die Polstellen liefert), heisst <u>charakt. Gl.</u>