Transferfunktion

LTI-Systeme

Sei $u(t)$ gegebene Fkt. und sei $n > m$.
Betrachten DGL der Form:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$$

(a's & b's : gegebene Konstanten)

Diese DGL beschreibt ein __lineares, Zeit-invariantes__ System: LTI

$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{\text{LTI-System}} \xrightarrow{y(t)}$$

$u(t)$: __Eingangsgrösse / Eingangssignal__
$y(t)$: __Ausgangsgrösse / Ausgangsignal__

__Bemerkung:__ Es gilt __Superpositionsprinzip__: Sei $y_1(t)$ Ausgang zu $u_1(t)$
$y_2(t)$ — " — $u_2(t)$
$\longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$ — " — $u_1(t) + u_2(t)$

Laplace-Trafo mit allen Anfangsbed. $= 0 \longrightarrow$

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

$$\longrightarrow \quad Y(s) = \underbrace{\frac{b_m s^n + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}}_{= G(s)} U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}}$$

heisst __Transferfunktion__ (oder Übertragungsfunktion) des Systems.

__Bemerkungen:__ (i) $G(s)$ beschreibt Beziehung zw. Eingangs- & Ausgangssignal im Bildbereich (Frequenzbereich)

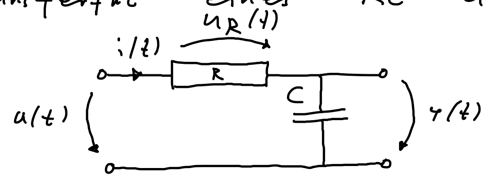
$$\xrightarrow{U(s)} \boxed{\cdot\, G(s)} \xrightarrow{Y(s)}$$

(ii) $G(s)$ ist echt gebrochen-rationale Fkt.

(iii) $G(s)$ hängt nur vom System, aber nicht vom Eingang $u(t)$ ab!

(iv) $G(s)$ beschreibt das Verhalten des Systems vollständig!

Bsp: Transferfkt einer RC-Glieds:



Kirchhoff:

$$\underbrace{R\, i(t)}_{= C \frac{dy}{dt}(t)} + y(t) = u(t) \qquad \left(C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{y} \quad C\frac{dy}{dt} = i \right)$$

$$\longrightarrow \quad RC\, y'(t) + y(t) = u(t)$$

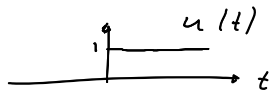
Laplace: (mit $y(0) = 0$) $\longrightarrow$ $RCs\, Y(s) + Y(s) = U(s)$

$$\longrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{RCs+1} U(s)$$

$$\longrightarrow \quad \underline{\text{Transferfkt:}} \quad \underline{G(s) = \frac{1}{RCs+1}}$$

Schrittantwort

Sei $u(t) = H(t)$



Ausgangssignal $y(t)$ heisst <u>Schrittantwort</u>.

$$u(t) = H(t) \longrightarrow U(s) = \mathcal{L}(H(t)) = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$$

$$\longrightarrow \text{Transferfkt.:} \quad \underline{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \underline{s\,Y(s)}$$

Diagramm Ableitung:

$$\begin{array}{ccc} y(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & Y(s) \\ \downarrow \frac{d}{dt} & & \downarrow \\ y'(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & sY(s) - y(0) \end{array}$$

I.e. $\boxed{G(s) = \mathcal{L}(y'(t)) + y(0)}$

Anwendung:
- Eingang: $u(t) = H(t)$
- Messung von Schrittantwort $y(t)$
- Transferfkt.: $G(s) = \mathcal{L}(y'(t)) + y(0)$

<u>Impulsantwort:</u>

Sei $u(t) = \delta(t)$. $y(t)$: <u>Impulsantwort</u> des Systems.

$$\longrightarrow U(s) = \mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

$$\longrightarrow \text{Transferfkt.:} \quad \boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = Y(s) = \mathcal{L}(\overset{\text{(gemessen)}}{y(t)})}$$

I.e. Transferfkt. ist Laplace-Trafo der Impulsantwort.

Aufgabe: Geg: DGL: $y'(t) + 2y(t) = u(t)$

Ges: (i) Transferfkt.
(ii) Schrittantwort
(iii) Impulsantwort

Lösg.: (i) $\mathcal{L}(\ldots) \longrightarrow sY(s) + 2Y(s) = U(s)$

$$\longrightarrow \underline{G(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \underline{\frac{1}{s+2}}$$

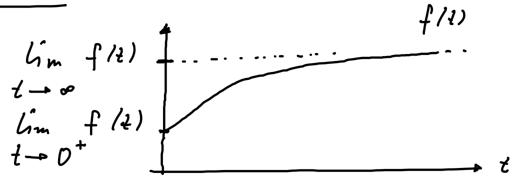
(ii) $U(s) = \mathcal{L}(H(t)) = \frac{1}{s} \longrightarrow Y(s) = G(s)U(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s+2)}$

$$\longrightarrow \underline{y(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right) \overset{PBZ}{=} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}\right) = \underline{\frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}}$$

(iii) $U(s) = \mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \longrightarrow Y(s) = G(s)U(s) = G(s) = \frac{1}{s+2}$

$$\longrightarrow \underline{y(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = \underline{e^{-2t}}$$

Grenzwerte: Meist interessiert $f(t)$ nur bei $t=0$ und für $\underline{t \to \infty}$ (asymptotisches Verhalten)



Es gilt:

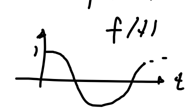
Anfangswert: $\boxed{\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)}$

Endwert: $\boxed{\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)}$

Bsp: (i) Sei $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \frac{s}{s^2+a^2}$

Anfangswert: $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{s^2}{s^2+a^2} = 1$

(Dies ist konsistent mit: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \cos(at)$



)

(ii) Endwert von $F(s) = \frac{5s+12}{s(s+4)}$

$$\underline{\lim_{t \to \infty} f(t)} = \lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{5s+12}{s+4} = \underline{3}$$

$\left(f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \ldots = 3 + 2e^{-4t} \xrightarrow{t \to \infty} 3 \right)$

⚠ Formeln gelten nur wenn Grenzwerte ex.!

Bsp: $F(s) = \frac{1}{s^2+1} \longrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sin(t)$

Formel: $\lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s^2+1} = 0$

Aber: $\lim_{t \to \infty} \sin(t)$ ex. nicht!

$\longrightarrow$ Formeln nur für stabile Systeme anwendbar (siehe Stabilität, siehe später).

Beweis Endwert: Eigenschaft Ableitung:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$$
$$\| \quad \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt$$

$$\rightarrow \underbrace{\lim_{s\to 0} \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt}_{} = \lim_{s\to 0} \left(sF(s) - f(0)\right)$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty f'(t) \underbrace{\lim_{s\to 0} e^{-st}}_{=1} dt}_{}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T f'(t) dt = \lim_{T\to\infty} \left(f(T) - f(0)\right)$$

$$\_ = \_ \rightarrow \quad \lim_{T\to\infty} f(T) = \lim_{s\to 0} sF(s) \qquad \square$$