Systeme von DGL mit Laplace

Bsp: $\boxed{\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{y} \;; \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$\mathcal{L}(\ldots) \longrightarrow \quad \mathcal{L}(\vec{y}) = \vec{Y}$

$\longrightarrow \quad \mathcal{L}(\vec{y}\,') = s\vec{Y} - \vec{y}(0) = s\vec{Y} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ DGL wird zu: $s\vec{Y} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{Y}$ $\qquad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{\left(s\mathbb{1} - \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right)}_{= \begin{pmatrix} s-5 & 4 \\ -3 & s+2 \end{pmatrix} = A} \vec{Y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

I.e. DGL wird zu: $A\vec{Y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left[A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right]$$

$$\longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{(s-5)(s+2)+12} \begin{pmatrix} s+2 & -4 \\ 3 & s-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2-3s+2} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-2)} \begin{pmatrix} s+2 & -4 \\ 3 & s-5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \vec{Y}(s) = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \begin{pmatrix} 3s-2 \\ 2s-1 \end{pmatrix}$$

$\parallel$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(y_1) \\ \mathcal{L}(y_2) \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \frac{3s-2}{(s-1)(s-2)} \overset{PBZ}{=} -\frac{1}{s-1} + \frac{4}{s-2}$$

$$\frac{2s-1}{(s-1)(s-2)} \overset{PBZ}{=} -\frac{1}{s-1} + \frac{3}{s-2}$$

$$\longrightarrow \underline{\vec{y}(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left(\vec{Y}(s)\right) = \begin{pmatrix} -e^{t} + 4e^{2t} \\ -e^{t} + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Man bestimme die Laplace-Trafo der folgenden Fkt. mit Hilfe der Def.:

(i) $f(t) = \begin{cases} 1 & : t \leq 2 \\ 0 & : t > 2 \end{cases}$

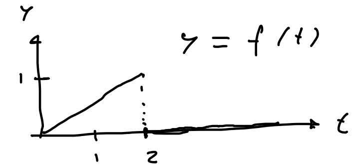
(ii) $f(t) = e^{t+7}$

Aufgabe: Für $a > 0$ betrachten wir $f(t) = \begin{cases} \cos(at) & : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2a} \\ 0 & : \frac{\pi}{2a} < t \end{cases}$

(i) Man skizziere $y = f(t)$

(ii) Man finde $\mathcal{L}(f(t))$

<u>Aufgabe:</u> Sei $f(t)$ gegeben durch:



(i) Man bestimme $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ mit Hilfe der Def. der Laplace-Trafo

(ii) Man schreibe $f(t)$ mit Hilfe von Heaviside-Fkt. und bestimme $\mathcal{L}(f(t))$ mit Hilfe der Eigenschaften der Laplace-Trafo.

(iii) $f(t)$ wird 10-periodisch fortgesetzt. Man finde die Laplace-Trafo dieser periodischen Fkt.