Erinnerung (und Erweiterung)

Partialbruchzerlegung für gebrochenrationale Fkt.

Vorgehen:

(i) Bruch echt gebrochen
(falls nicht: Polynomdivision)

(ii) Zerlegung Nenner in Lin.-Fakt.
(aus NS des Nenners)

(iii) Ansatz:

NS:	Term in PBZ
x_1 einfach	$\frac{A}{x-x_1}$
x_1 n-fach	$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n}$
x_1 & $\overline{x_1}$ komplexe NS (einfach)	$\frac{A+Bx}{x^2+px+q}$ wobei $x^2+px+q = (x-x_1)(x-\overline{x_1})$ Konj. komplex

(iv) Konst. $A, B, A_1, A_2, \dots$ bestimmen durch
Koeff.-Vergleich.

(v) Einsetzen der gefundenen Werte für
die Konst. in Ansatz.

Bsp: (i) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$; NS Nenner : $x^2-1=0 \longrightarrow x = \pm 1$

$\longrightarrow$ Ansatz:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad / \cdot (x^2-1)$$

$$x = A(x+1) + B(x-1)$$

$b_0x^0 + b_1x^1 + \dots + b_nx^n = a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ $\longleftrightarrow$ $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1$, $\vdots$ $b_n = a_n$

Koeff.-Vergleich: $x^1: \quad 1 = A + B$

$x^0: \quad 0 = A - B$

$\longrightarrow A = B = \frac{1}{2}$

$$\longrightarrow f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

(ii) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1}$

Polynomdiv:

$$x^2 : (x^2-2x+1) = 1 + \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$
$$\frac{-(x^2-2x+1)}{2x-1}$$

NS Nenner: $x^2-2x+1 = (x-1)^2 = 0 \longrightarrow x_1 = 1$ doppelt.

Ansatz: $$\frac{2x-1}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \quad \Big/ \cdot (x-1)^2$$

$$2x-1 = A(x-1) + B$$

Koeff.-Vergl.: $x^1: \; 2 = A$

$x^0: \; -1 = -A + B \longrightarrow A = 2; \; B = 1$

$$\longrightarrow \underline{f(x) = \frac{x^2}{x^2-2x+1} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}}$$

(iii) $$f(x) = \frac{5x^2+2x+1}{x^3+x}$$

NS Nenners: $x^3 + x = 0$

$x(x^2+1) = 0$

$\frac{A}{x-x_1}$, $x_1 = 0$

$\longrightarrow x_1 = 0; \; x_2 = j; \; x_3 = -j$

Ansatz: $$\frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B+Cx}{x^2+1} \quad \Big/ \cdot (x^3+x)$$

$$5x^2+2x+1 = A(x^2+1) + (B + Cx)x$$

Koeff.-Vergleich: $x^2: \; 5 = A + C$

$x^1: \; 2 = B$

$x^0: \; 1 = A$

$\longrightarrow A = 1, \; B = 2, \; C = 4$

$$\longrightarrow \underline{f(x) = \frac{5x^2+2x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{2+4x}{x^2+1}}$$

Inverse Laplace-Trafo

Ist Rücktrafo von Bildbereich in den Originalbereich / Zeitbereich

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Zeitbereich}\\ f(t)\end{matrix}} \; \underset{\text{Laplace}^{-1}}{\overset{\text{Laplace}}{\rightleftarrows}} \; \boxed{\begin{matrix}\text{Bildbereich}\\ F(s)\end{matrix}}$$

Symbole: $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$

oder: $F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$

Prinzipiell ist inverse Trafo direkt möglich.

In Praxis: mit Tabellen.

Bsp: Aus $t^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{s^3}$

folgt: $\frac{2}{s^3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t^2$

i.e. $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3}\right) = t^2$.

Bsp: $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin(t)$.

Gebrochenrat. Fkt.: (treten oft auf als Übertragungsfkt. eines Regelkreises).

Idee: Mit PBZ in Summe aus einfachen Brüchen zerlegen, dann Gliedweise Rücktrafo.

Bsp: $F(s) = \dfrac{s^3+2s^2-4s+4}{s^4-4s^3+4s^2} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{s^3+2s^2-4s+4}{s^2(s-2)^2}$

NS des Nenners sind: $s_{1,2} = 0$

$s_{3,4} = 2$

Ansatz PBZ:

$$\frac{s^3+2s^2-4s+4}{s^2(s-2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{(s-2)^2} \quad / \cdot s^2(s-2)^2$$

$$s^3+2s^2-4s+4 = As(s-2)^2 + B(s-2)^2 + Cs^2(s-2) + Ds^2$$

Koeff.-Vergleich: $s^3: \quad 1 = A + C$

$s^2: \quad 2 = -4A + B - 2C + D$

$s^1: \quad -4 = 4A - 4B$

$s^0: \quad 4 = 4B$

$\longrightarrow A = 0;\ B = 1;\ C = 1;\ D = 3$

$$\longrightarrow F(s) = \frac{s^3+2s^2-4s+4}{s^2(s-2)^2} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-2} + \frac{3}{(s-2)^2}$$

Gliedweise Rücktrafo: $\underline{f(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(s-2)^2}\right)$

$$= \underline{t + e^{2t} + 3t\,e^{2t}}$$

Für diesen Term:

$$\left.\begin{tikzcd} t \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "e^{2t}"'] & \frac{1}{s^2} \arrow[d, "s \mapsto s-2"] \\ e^{2t}t \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{(s-2)^2} \end{tikzcd}\right\} \text{Dämpfung}$$

(i) **Aufgabe:** $F(s) = \dfrac{s}{s^2-1}$; Ges: $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$

Lösg.: PBZ: $F(s) = \dfrac{s}{s^2-1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s+1}$

$$\longrightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}}$$

(ii) $F(s) = \dfrac{s^2}{s^2-2s+1} \underset{\uparrow}{=} 1 + \dfrac{2s-1}{s^2-2s+1} \underset{\uparrow}{=} 1 + \dfrac{2}{s-1} + \dfrac{1}{(s-1)^2}$

Polynomdiv. PBZ

$$\longrightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}(1) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)$$

$$= \underline{\delta(t) + 2e^t + te^t}$$

siehe später

$$\begin{tikzcd} t \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^t"'] & \frac{1}{s^2} \arrow[d, "s \mapsto s-1"] \\ te^t \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{1}{(s-1)^2} \end{tikzcd}$$

(iii) $F(s) = \dfrac{5s^2+2s+1}{s^3+s} \underset{\text{PBZ}}{=} \dfrac{1}{s} + \dfrac{2+4s}{s^2+1}$

$$\longrightarrow \underline{\mathcal{L}^{-1}(F(s))} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2+4s}{s^2+1}\right)$$

$$= 1 + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$= \underline{1 + 2\sin(t) + 4\cos(t)}$$

(iv) $F(s) = \dfrac{2}{s^2+6s+13}$ ⟵ irreduzibel (i.e. nur komplexe NS)

<u>Idee:</u> Quadratische Ergänzung:

$$s^2+6s+13 = (s+3)^2 - 9 + 13$$
$$= (s+3)^2 + 4$$

$$\longrightarrow F(s) = \frac{2}{(s+3)^2+4}$$

$$\begin{tikzcd} \sin(t) \arrow[rr, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "t \mapsto 2t"'] & & \frac{1}{s^2+1} \arrow[d] \\ \sin(2t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] \arrow[d, "\cdot e^{-3t}"'] & \frac{2}{s^2+4} \arrow[d, "s \mapsto s+3"] \arrow[r, phantom, "="] & \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{s}{2}\right)^2+1} \\ e^{-3t}\sin(2t) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \frac{2}{(s+3)^2+4} & \end{tikzcd}$$

<u>Ähnlichkeit</u>

<u>Dämpfung</u>

$$\longrightarrow \underline{\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = e^{-3t}\sin(2t)}$$