Wiederholung:

Def: $F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$ ist Laplace-Trafo von $f(t)$.

$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$

$F(s)$: Bildfkt. $\quad f(t)$: Originalfkt.

Satz: Fkt. $f(t)$ mit $|f(t)| \leq M e^{at}$ besitzen Laplace-Trafo $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$.

Bekannte Trafos:

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2} \qquad \mathcal{L}(\cos(t)) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Eigenschaft: **Linearität:** $\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 \mathcal{L}(f_1(t)) + c_2 \mathcal{L}(f_2(t))$.

Haben gesehen: $\boxed{\mathcal{L}(\cos(t))} = \mathcal{L}\left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{jt}) + \mathcal{L}(e^{-jt})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j}\right) = \boxed{\frac{s}{s^2+1}}$$

Aufgabe: $\mathcal{L}(\sin(t)) = ?$ $\quad \left(\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)$

Lösg: $\boxed{\mathcal{L}(\sin(t))} = \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}(e^{jt}) - \mathcal{L}(e^{-jt})\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j}\right)$

$$= \boxed{\frac{1}{s^2+1}}$$

Ähnlichkeitssatz

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0, \\ \text{wobei } F(s) = \mathcal{L}(f(t)) \end{array}}$$

Beweis: $\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^\infty f(at)\, e^{-st}\, dt$

$$= \int_0^\infty f(u)\, e^{-\frac{s}{a}u} \frac{1}{a}\, du = \frac{1}{a} \underbrace{\int_0^\infty f(u)\, e^{-\frac{s}{a}u}\, du}_{= F\left(\frac{s}{a}\right)} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \square$$

Subs.: $u = at \longrightarrow du = a\,dt$

Bsp: (i) $f(t) = \cos(\omega t)$ $\quad$ Wir wissen:

$$\mathcal{L}(\cos(t)) = \frac{s}{s^2+1} = F(s)$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \frac{\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(ii) $f(t) = (4t)^3$ Wir wissen: $\mathcal{L}(t^3) = \frac{3!}{s^4} = F(s)$

$$\longrightarrow \mathcal{L}((4t)^3) = \frac{1}{4} F\left(\frac{s}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3!}{\left(\frac{s}{4}\right)^4} = \frac{3!\,4^3}{s^4} = \frac{384}{s^4}.$$

[Bem.: $\mathcal{L}(4t^3) = 4\,\mathcal{L}(t^3) = 4 \cdot \frac{3!}{s^4}$]

<u>Aufgabe:</u> Unter Verwendung von: $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$ bestimme man: (i) $\mathcal{L}(\sin^2(t))$
(ii) $\mathcal{L}(\cos^2(t))$

<u>Lösg:</u> (i) $\mathcal{L}(\sin^2(t)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(1 - \cos(2t))\right)$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}(1) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos(2t))$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{s}{2}}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2+4-s^2}{s(s^2+4)} = \underline{\frac{2}{s^3+4s}}$$

(ii) $\mathcal{L}(\cos^2(t)) = \mathcal{L}(1 - \sin^2(t))$

$$= \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(\sin^2(t)) = \ldots = \frac{s^2+2}{s^3+4s}$$

<u>Dämpfungssatz:</u>

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(s+a), \quad a > 0, \quad \text{wobei } F(s) = \mathcal{L}(f(t))}$$

<u>Beweis:</u> $\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = \int_0^\infty e^{-at} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f(t)\, e^{-(a+s)t}\, dt = F(s+a)$ □

<u>Bsp.:</u> Wir wissen: $\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{s^2+1} = F(s)$

$$\longrightarrow \mathcal{L}(e^{-3t}\sin(t)) = F(s+3) = \frac{1}{(s+3)^2+1}$$

<u>Aufgabe:</u> Man zeige: $\mathcal{L}(e^{-3t}\sin(2t)) = \frac{2}{(s+3)^2+4}$

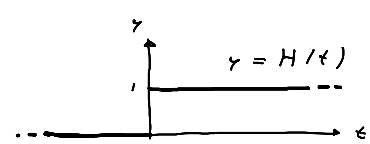
<u>Lösg.:</u> Wir wissen: $\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\xrightarrow{\text{Ähnlichkeit}} \mathcal{L}(\sin(2t)) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\xrightarrow{\text{Dämpfung}} \mathcal{L}(e^{-3t}\sin(2t)) = \underline{\frac{2}{(s+3)^2+4}}$$

<u>Heaviside Stufenfunktion:</u>

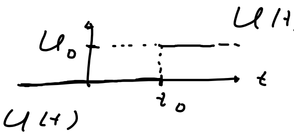
$$\boxed{H(t) = \begin{cases} 0 & : \; t < 0 \\ 1 & : \; t \geq 0 \end{cases}}$$



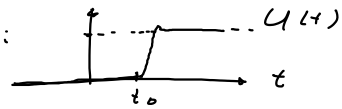
Modelliert (idealisiertes) Einschalten eines Signals.

Bsp.: Gleichspannung U_0 eingeschaltet bei $t = t_0$

$$\longrightarrow \quad U(t) = U_0 H(t - t_0)$$



Bem.: (i) Realität sieht meist so aus:

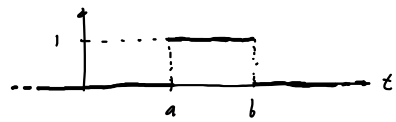


(ii) Namen:
- Heaviside
- Sprungfkt.
- Stufenfkt.
- Θ - Fkt.

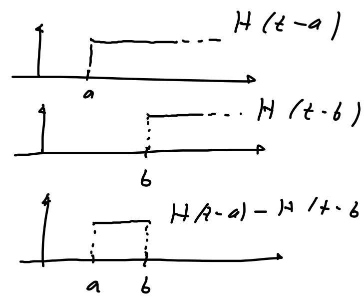
(iii) Graph meist:

Fensterfunktion (rechteckiger Impuls)

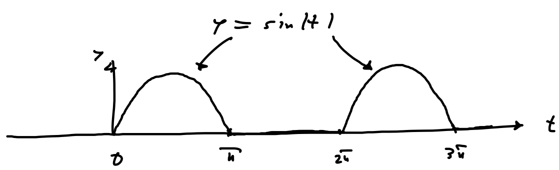
Anfang: $t = a$
Ende: $t = b$
Höhe: 1



$$\longrightarrow \quad H(t-a) - H(t-b):$$



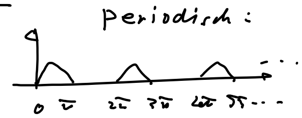
Bsp:



kann geschrieben werden als: $\sin(t)\big(H(t) - H(t-\pi)\big) + \sin(t)\big(H(t-2\pi) - H(t-3\pi)\big)$

$$= \sin(t)\big(H(t) - H(t-\pi) + H(t-2\pi) - H(t-3\pi)\big)$$

[periodisch:



$$\sin(t) \sum_{k=0}^{\infty} \big(H(t - k2\pi) - H(t - (2k+1)\pi)\big)$$]

Aufgabe: Man schreibe die Fkt.:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ t & : \quad 0 \leq t < 1 \\ t^2 & : \quad t \geq 1 \end{cases}$$

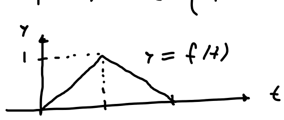
in einen Zeile.

Lösg: $f(t) = t\big(H(t) - H(t-1)\big) + t^2 H(t-1)$

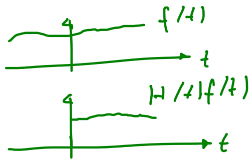
Aufgabe: Man zeichne den Graphen von

$$f(t) = t\big(H(t) - H(t-1)\big) + (2-t)\big(H(t-1) - H(t-2)\big)$$

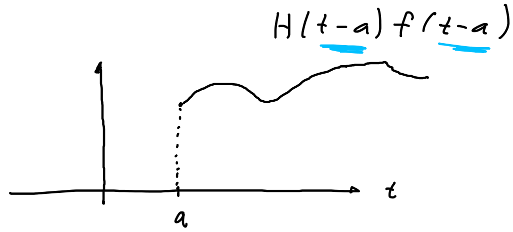
Lösg.:



Zeitverschiebung: Nach rechts:



Originalfkt.



Verschobene Fkt. $(a>0)$

Es gilt:

$$\boxed{\mathcal{L}\big(H(t-a)f(t-a)\big) = e^{-as}F(s), \quad a>0, \quad \text{wobei } F(s) = \mathcal{L}(f(t))}$$

Beweis:

$$\mathcal{L}\big(H(t-a)f(t-a)\big) = \int_0^\infty H(t-a)f(t-a)e^{-st}\,dt$$

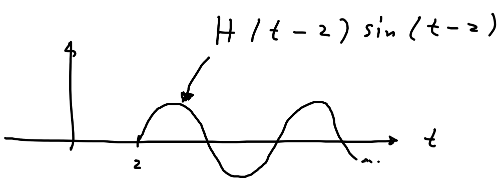
$$= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(u)\,e^{-s(u+a)}\,du$$

Subs.: $u = t-a$; $t = a \longrightarrow u = 0$

$$= e^{-sa}\underbrace{\int_0^\infty f(u)\,e^{-su}\,du}_{=\mathcal{L}(f(t)) = F(s)} = \underline{e^{-sa}F(s)} \quad \square$$

Bsp: Laplace-Trafo von:



$$\mathcal{L}\big(H(t-2)\sin(t-2)\big) = e^{-2s}F(s) = e^{-2s}\frac{1}{s^2+1}.$$

$$F(s) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{s^2+1}$$