Laplace - Trafo

Wiederholung: **Def.:**

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt}$$

ist die Laplace - Trafo von $f(t)$.

$$\underset{\text{Bildfkt.}}{F(s)} = \mathcal{L}(\underset{\text{Originalfkt.}}{f(t)})$$

Haben gesehen: (mit $s \in \mathbb{R}$)

$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$ (für $s > 0$)

$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$ (für $s > 0$)

$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ (für $s > a$)

Im Allgemeinen $s \in \mathbb{C}$.

Konvergenzbereich

Bsp: (i) $f(t) = 1$ $\longrightarrow$ $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT}\right)$

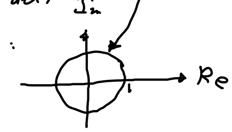
Wie verhält sich dies für $T \to \infty$?

Wir schreiben: $s = \underset{\text{Re}(s)}{\alpha} + \underset{\text{Im}(s)}{\beta} j$

$$\longrightarrow e^{-sT} = e^{-(\alpha + \beta j)T}$$

$$= e^{-\alpha T} e^{-\beta j T} = e^{-\alpha T} \underbrace{\left(\cos(-\beta T) + j \sin(-\beta T)\right)}_{\text{dreht sich auf Einheitskreis}}$$

dreht sich auf Einheitskreis:



$e^{-\alpha T} \longrightarrow 0$ falls $\alpha > 0$

$e^{-\alpha T} \longrightarrow \infty$ falls $\alpha < 0$

$e^{-\alpha T} = 1$ falls $\alpha = 0$

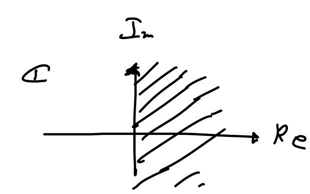
Somit gilt: $\lim_{T \to \infty} e^{-sT} = 0$ falls $\text{Re}(s) > 0$

$\lim_{T \to \infty} e^{-sT}$ ex. nicht, falls $\text{Re}(s) \leq 0$.

$$\longrightarrow \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} \quad \text{falls } \text{Re}(s) > 0.$$

I.e. $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$, Konvergenzbereich:

$$H = \{ s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0 \}$$

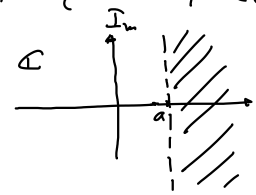


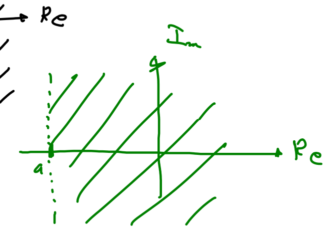
Bsp: (ii) $f(t) = e^{at}$ $\longrightarrow$ $F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt$

$$= \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

Konvergenzbereich:

$H = \{ s \in \mathbb{C} \mid Re(a) < Re(s) \}$





I.e. $\boxed{\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \quad \text{für } Re(a) < Re(s)}$

Zwei Fragen:
(i) Für welche Fkt. $f(t)$ ex. Laplace-Trafo?
(ii) Wie sieht Def.-Bereich von $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ aus, i.e. welche $s \in \mathbb{C}$ sind zugelassen?

Def: Eine Fkt. $f(t)$ heisst <u>von exp. Ordnung</u>, falls es a, M gibt, so dass: $|f(t)| \leq M e^{at}$

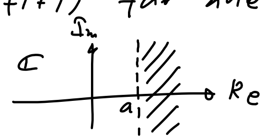
(I.e. $f(t)$ von exp. O., wenn sie höchstens exp. wächst).
Wir nennen das kleinste solche a die <u>exp. Ordnung von f</u>.

Bsp:

$f(t) = 1$	0
$f(t) = \sin(wt)$	0
$f(t) = \cos(wt)$	0
$f(t) = e^{bt}$	b

Gegenbeispiel: $f(t) = e^{t^2}$ ist <u>nicht</u> von exp. O. (wächst zu schnell!)

Satz: Für $f(t)$ von exp. O. a konvergiert die Laplace-Trafo $\mathcal{L}(f(t))$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) > a$.



Beweis: Annahme: $Re(s) > a$, $|f(t)| \leq M e^{at}$
Wir schreiben: $s = (a+\alpha) + jb$, mit $\alpha > 0$.

$$\longrightarrow \underline{f(t)e^{-st}} \leq |f(t)e^{-st}| = |f(t)\, e^{-(a+\alpha)t} \underbrace{e^{-jbt}}_{|\cdot| = 1}|$$

$$= |f(t)\, e^{-(a+\alpha)t}|$$

$$= |f(t)|\, |e^{-(a+\alpha)t}|$$

$$\leq M e^{\alpha t} e^{-(\alpha+\nu)t} = \underline{M e^{-\nu t}} \qquad (*)$$

$$\longrightarrow \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \overset{(*)}{\leq} \int_0^\infty M e^{-\alpha t} dt = -\frac{M}{\alpha} e^{-\nu t}\Big|_0^\infty = \frac{M}{\alpha}$$

I.e. $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \leq \frac{M}{\alpha}$

i.e. $\underline{\mathcal{L}(f(t))}$ konvergiert. $\square$

Bem.: (i) Alle von uns betrachteten Fkt. sind von exp. O. und besitzen eine Laplace-Trafo.

(ii) Oft ist t die Zeit.

Exp. in e^{-st} muss dim.-los sein!

$\longrightarrow$ s ist eine (komplexe) Frequenz.

$$\left(\text{Mit } s = \alpha + \beta j \longrightarrow e^{-st} = e^{-\alpha t}\left(\cos(-\beta t) + j \sin(-\beta t)\right) \right)$$

Weitere Laplace-Trafos:

$$\boxed{\mathcal{L}(t^2)} = \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt$$

$$\left(\int f g' = fg - \int f' g \right)$$

$$= t^2 \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2t\left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) dt$$

$$= 0 + \frac{2}{s} \underbrace{\int_0^\infty t e^{-st} dt}_{= \mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}} = \boxed{\frac{2}{s^3}}$$

Aufgabe: (i) Unter Verwendung von $\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$ bestimme man $\mathcal{L}(t^3)$.

(ii) Man errate $\mathcal{L}(t^n)$.

Lösg.: (i) $\mathcal{L}(t^3) = \ldots = \frac{6}{s^4}$

(ii) $$\boxed{\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}}$$

Linearität: Sei C eine Konst.

(i) $\mathcal{L}(C f(t)) = \int_0^\infty C f(t) e^{-st} dt = C \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = C \mathcal{L}(f(t))$.

(ii) $\mathcal{L}(f_1(t) + f_2(t)) = \int_0^\infty (f_1(t) + f_2(t)) e^{-st} dt = \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt$

$= \mathcal{L}(f_1(t)) + \mathcal{L}(f_2(t))$.

I.e. $$\boxed{\mathcal{L}(C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)) = C_1 \mathcal{L}(f_1(t)) + C_2 \mathcal{L}(f_2(t))}$$

Bsp: $\mathcal{L}(7+3t) = \mathcal{L}(7) + \mathcal{L}(3t)$

$$= 7\mathcal{L}(1) + 3\mathcal{L}(t)$$

$$= \frac{7}{s} + \frac{3}{s^2}$$

Erinnerung: $e^{jt} = \cos(t) + j\sin(t)$ (1)

$$e^{-jt} = \cos(-t) + j\sin(-t)$$

$$= \cos(t) - j\sin(t) \quad (2)$$

(1) + (2) $\longrightarrow$ $\cos(t) = \dfrac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$

(1) − (2) $\longrightarrow$ $\sin(t) = \dfrac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$

$$\boxed{\mathcal{L}(\cos(t))} \underset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{jt}) + \mathcal{L}(e^{-jt})\right) \underset{\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j} + \frac{1}{s+j}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{s+j+s-j}{(s-j)(s+j)} = \boxed{\frac{s}{s^2+1}}$$

Aufgabe: $\mathcal{L}(\sin(t)) = ?$