Laplace Transformation

Einführung:

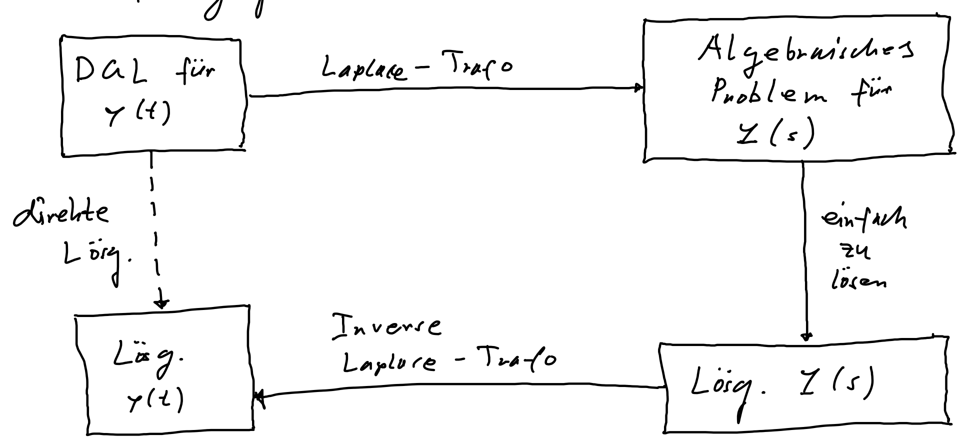
Laplace-Trafo ist Methode um DGL zu lösen.

Idee: Heaviside

Ersetze $\frac{d}{dt}$ durch p und rechne mit p wie mit einen Variablen.
(siehe später).

Rigorose Rechtfertigung: Laplace.

Vorgehen:



- Klassische Ingenieursmathematik
- Sprache in Regelungs- & Signaltechnik.

Definition:

Sei $f(t)$ gegeben.

$$\boxed{F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt}$$

heisst Laplace-Transformierte von $f(t)$.

symbolisch: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}(f(t)) = \ldots\ldots$

oder: $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

Namen: $f(t)$: Originalfkt.

$F(s)$: Bildfkt.

Bemerkung: Im allgemeinen $s \in \mathbb{C}$.

Erste Beispiele: (Hier: provisorische Annahme: $s \in \mathbb{R}$)

(i) $f(t) = 1$: $\longrightarrow$ $F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

$s=0$: $\longrightarrow$ $F(s) = \int_0^\infty e^{-0}\, dt = \int_0^\infty dt$

$$F(0) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-0\cdot t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty dt = \infty$$

$f(t) = 1$

$\longrightarrow$ $\underline{F(s) \text{ ex. nicht für } s = 0 !}$

$\underline{s \neq 0:}$

$$\longrightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$\underline{s > 0}$ $\longrightarrow \lim_{T\to\infty} e^{-sT} = 0$

$\longrightarrow$ $\underline{F(s) = \frac{1}{s} \text{ für } s > 0}$

$\underline{s < 0:}$ $\longrightarrow \lim_{T\to\infty} e^{-sT} = \infty$

$\longrightarrow$ $\underline{F(s) \text{ ex. nicht für } s < 0}$

I.e. wir finden:

$$\boxed{\mathcal{L}(1) = \begin{cases} \frac{1}{s} & : s > 0 \\ \text{nicht def.} & : s \leq 0 \end{cases}}$$

$\underline{(ii)\ f(t) = t:}$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty t\, e^{-st}\,dt$$

$$\int_{\dots}^{\dots} f g' = fg\Big|_{\dots}^{\dots} - \int_{\dots}^{\dots} f' g \quad \left(\begin{matrix}\text{part.}\\ \text{Int.}\end{matrix}\right)$$

$$= \underbrace{-\frac{t}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty}_{=0 \text{ für } s>0} - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st}\,dt$$

$$\underset{s>0}{\overset{\uparrow}{=}} 0 + \frac{1}{s} \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\,dt}_{= \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \ (\text{für } s>0)} = \frac{1}{s^2}$$

I.e.

$$\boxed{\mathcal{L}(t) = \begin{cases} \frac{1}{s^2} & : s > 0 \\ \text{nicht def.} & : s \leq 0 \end{cases}}$$

$\underline{\text{Aufgabe:}}$ Man finde Laplace-Trafo von $f(t) = e^{at}$.

$\underline{\text{Lösg:}}$ $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\,dt$

$$= \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt \qquad \left(\begin{matrix} a - s < 0 \quad / +s \\ a < s \end{matrix} \right)$$

$$\underset{a<s}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

I.e.

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{at}) = \begin{cases} \frac{1}{s-a} & : a < s \\ \text{nicht def.} & : a \geq s \end{cases}}$$