MATHEMATIK 1
VERSION 23. Januar 2019

LISIBACH ANDRÉ

Das Gewicht der Vorlesung liegt auf konkreten Rechnungen und weniger auf abstrakten Formulierungen. Deshalb befinden sich im Skript viele Rechenbeispiele und weitere werden im Unterricht besprochen. Wir benutzen Kursivschrift für Begriffsdefinitionen.

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

In den Analysisvorlesungen wurden (meist) gegebene Funktionen auf ihre Eigenschaften hin untersucht (analysiert). Beim Studium von Differentialgleichungen werden Gesetzmässigkeiten aus Physik, Ökonomie, Biologie usw. mathematisch formuliert und dazu Lösungen gesucht. Die Formulierungen sind in der Form von Differentialgleichungen, die Lösungen davon sind Funktionen welche die interessierenden Grössen, meist in Abhängigkeit der Zeit, beschreiben.

1.1. **Einführende Beispiele.** Ohne die auftretenden Begriffe im Detail zu erklären (siehe nachfolgenden Teilabschnitt), werden einfache Beispiele und Anwendungen betrachtet.

1.1.1. *Kinematik.* Wir betrachten eine eindimensionale Bewegung mit konstanter Beschleunigung und interessieren uns für die Position in Abhängigkeit der Zeit. Die Voraussetzung konstanter Beschleunigung ist beispielsweise beim freien Fall in Erdnähe gegeben. Die Gesetzmässigkeit welche das kinematische Problem beschreibt ist

$$\frac{d^2 s}{dt^2}(t) = a,$$

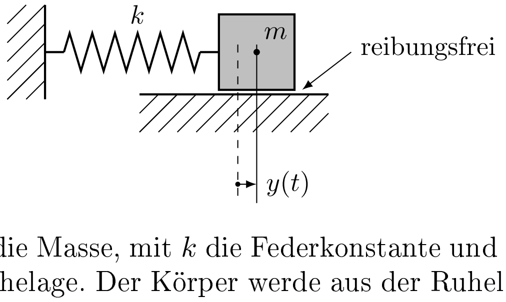
wobei wir mit $s(t)$ die Position in Abhängigkeit der Zeit t und mit a die konstante Beschleunigung bezeichnen. Daraus folgt durch zweifache unbestimmte Integration

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2,$$

wobei C_1, C_2 Integrationskonstanten sind. Mit den Anfangsbedingungen $s(0) = s_0$ (Position zum Zeitpunkt $t = 0$) und $v(0) = v_0$ (Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$) folgt

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0.$$

1.1.2. *Dynamik.* Wir betrachten das mechanische System:



Wir bezeichnen mit m die Masse, mit k die Federkonstante und mit $y(t)$ die Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage. Der Körper werde aus der Ruhelage ausgelenkt und zum

Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Wir interessieren uns für die Auslenkung aus der Ruhelage in Abhängigkeit der Zeit. Die Gesetzmässigkeit welche dieses Problem beschreibt ist das Bewegungsgesetz von Newton, i.e. $F = ma$, wobei wir mit F die Kraft auf den Körper und mit a dessen Beschleunigung bezeichnen. Mit

$$F(t) = -ky(t), \qquad a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t).$$

folgt

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) = -Ky(t), \qquad \text{wobei} \qquad K = \frac{k}{m}.$$

Mögliche Lösungen dieser Gleichung sind

$$\begin{aligned} y(t) &= C\sin(\sqrt{K}t) \\ y(t) &= C\cos(\sqrt{K}t) \\ y(t) &= C_1\cos(\sqrt{K}t) + C_2\sin(\sqrt{K}t), \end{aligned}$$

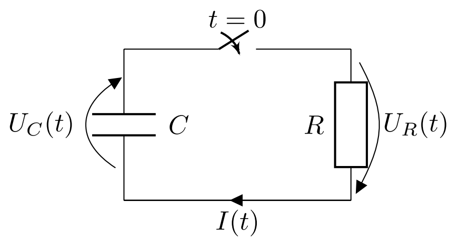
wobei C, C_1, C_2 Konstanten sind. Diese möglichen Lösungen beschreiben harmonische Schwingungen. Die letzte davon, zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0, \qquad v(0) = \frac{dy}{dt}(0) = v_0$$

ergibt

$$y(0) = y_0\cos(\sqrt{K}t) + \frac{v_0}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}t).$$

1.1.3. *Elektrotechnik.* Wir betrachten die Schaltung:



Auf dem Kondensator befinde sich eine Ladung Q_0. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Wir interessieren uns für die Ladung Q auf dem Kondensator in Abhängigkeit der Zeit t. Die Gesetzmässigkeit zur Beschreibung der Situation ist die Kirchhoffsche Maschenregel:

$$U_C(t) + U_R(t) = 0.$$

Zusätzlich haben wir die Gesetze

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \qquad U_R(t) = RI(t).$$

Eingesetzt in obige Gleichung, zusammen mit $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$, erhalten wir

$$\frac{dQ}{dt}(t) = -\frac{1}{RC}Q(t).$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$Q(t) = Q_0e^{-\frac{1}{RC}t},$$

welche auch die Anfangsbedingung $Q(0) = Q_0$ erfüllt.

1.2. **Grundbegriffe.**

1.2.1. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Eine *gewöhnliche Differentialgleichung* der *Ordnung* n ist eine Gleichung in welcher eine unbekannte Funktion $y(x)$, ihre Ableitungen bis zur Ordnung n und die Variable x auftreten. Beispiele:[1]

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}(x) &= -12y(x), \\ \frac{d^2y}{dx^2}(x) + 4\frac{dy}{dx}(x) + 2y(x)^2 &= \cos(x), \\ y''y' + yy' &= 0, \\ \sqrt{y^{(17)}} + \sin^2(y') &= x^4. \end{aligned}$$

Diese vier Differentialgleichung sind von der Ordnung 1, 2, 2 und 17.

Der Begriff *gewöhnlich* wiederspiegelt den Fakt dass nur Funktionen von einer unbekannten Variablen (in den obigen Beispielen ist dies x, wenn es sich um dynamisch Probleme handelt werden wir aber t (als Zeitvariable) verwenden) und somit auch nur (gewöhnliche) Ableitungen nach dieser Variabel auftreten. Dies ist im Gegensatz zu den partiellen Differentialgleichungen, in welchen Funktionen von meherer Variablen und somit partielle Ableitungen auftreten. Ein Beispiel für eine partielle Differentialgleichung ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Partielle Differentialgleichungen sind nicht Gegenstand der vorliegenden Betrachung.

1.2.2. *Explizite und implizite Darstellung.* Ist in der Differentialgleichung die höchste auftretende Ableitung als Funktion der Ableitungen niedrigerer Ordnung und der Variabel x gegeben, so nennt man die Darstellung der Differentialgleichung *explizit*:

$$y^{(n)} = G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

In dieser Gleichung ist G eine gegebene Funktion. Beispiele für die explizite Darstellung sind

$$\begin{aligned} y' &= -4y, \\ y'' &= y' + 2y + x, \\ y^{(3)} &= (y')^2 + y^2, \\ \frac{d^2y}{dx^2}(x) &= -7\frac{dy}{dx}(x). \end{aligned}$$

Das Gegenstück zur expliziten Darstellung ist die *implizite* Darstellung einer Differentialgleichung:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

[1]Wir weisen darauf hin dass im folgenden die verschiedenen Notationen für Funktionen und ihre Ableitungen verwendet werden. Auch werden oft die Argumente von Funktionen zur besseren Übersicht nicht notiert. Beispielsweise sind

$$\begin{aligned} y' + y'' &= x, \\ \frac{dy}{dx} + \frac{d^y}{dx^2} &= x, \\ \frac{dy}{dx}(x) + \frac{d^2y}{dx^2}(x) &= x \end{aligned}$$

die selben Differentialgleichungen.

wobei in dieser Gleichung F eine gegebene Funktion ist. Beispiele für die implizite Darstellung sind

$$y'y'' + y^2 = 0,$$
$$y(x)\frac{d^2y}{dx^2}(x) + \cos\left(\frac{dy}{dx}(x)\right) - x^2 = 0.$$

Oft ist es möglich eine implizit gegebene Differentialgleichung auf explizite Form umzuschreiben. Beispielsweise kann

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

auf

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

umgeschrieben werden.

1.2.3. *Lösung.* Eine *Lösung* einer Differentialgleichung ist eine Funktion $y(x)$, welche die Differentialgleichung identisch, i.e. für alle x im betrachteten Intervall, erfüllt. Für eine gegebene Lösung wird dies durch einsetzen überprüft. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung und Funktion

$$y' = x + y, \qquad y(x) = e^x - x - 1.$$

Einsetzen von $y(x)$ in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt

$$y' = e^x - 1.$$

Einsetzen von $y(x)$ in die rechte Seite der Differentialgleichung ergibt

$$x + y = x + e^x - x - 1 = e^x - 1.$$

Die beiden erhaltenen Ausdrücke stimmen überein. Somit handelt es sich bei der gegebenen Funktion $y(x)$ um eine Lösung der Differentialgleichung. Bei dem betrachteten Intervall in diesem Beispiel handelt es sich um die gesamten reellen Zahlen.

1.2.4. *Allgemeine Lösung.* Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}(x) = x.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung finden wir durch unbestimmte Integration der rechten Seite:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wir sehen also dass für jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = x$ ist. Das heisst dass wir unendlich viele Lösungen gefunden haben. Diese Erkenntnis gilt allgemein, i.e. eine gewöhnliche Differentialgleichung besitzt im allgemeinen unendlich viele Lösungen. Die Menge aller Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird als *allgemeine Lösung* bezeichnet.

Die Differentialgleichung $y' = x$ ist ein Beispiel einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx}(x) = f(x),$$

wobei $f(x)$ eine gegebene Funktion ist. Wir sehen dass jede Stammfunktion $F(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Da sich zwei Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante unterscheiden, ergibt sich die allgemeine Lösung durch Wahl einer festen Stammfunktion $F(x)$ und Addition einer Konstanten

$$y(x) = F(x) + C.$$

Ein weiterer wichtiger Typ von Differentialgleichungen sind Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx}(x) = y(x).$$

Wir sehen dass $y(x) = e^x$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Jedoch führt die Addition einer Konstanten nicht auf die allgemeine Lösung, i.e. $y(x) = e^x + C$ erfüllt die Differentialgleichung nicht. Die allgemeine Lösung (siehe unten) ist gegeben durch

$$y(x) = Ce^x,$$

i.e. die gefundene Lösung $y(x) = e^x$ wird mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$ multipliziert um die allgemeine Lösung zu erhalten.

Was den beiden obigen Typen von Differentialgleichungen gemeinsam ist, ist die Tatsache dass die allgemeine Lösung eine Konstante enthält. Man sagt auch einen *Parameter*. Dies hängt damit zusammen dass die beiden Typen von Differentialgleichungen beide erster Ordnung sind. Wir betrachten nun die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = x.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich durch zweifache unbestimmte Integration zu

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2,$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind. Die betrachtete Differentialgleichung ist zweiter Ordnung und die zugehörgige allgemeine Lösung hängt von zwei Konstanten ab. Allgemein gilt dass die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung von n Konstanten $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ abhängt. Das erste einführende Beispiel gibt für diesen Sachverhalt die physikalische Interpretation. In diesem Beispiel wird die Position in Abhängigkeit der Zeit gesucht, wenn man voraussetzt dass die Beschleunigung konstant ist. Die Lösung hängt von zwei Konstanten ab, der Position und der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$.

1.2.5. *Partikuläre Lösung.* Wir betrachten wieder die Differentialgleichung $y' = x$. Die allgemeine Lösung davon ist

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sei nun für das betrachtete Problem die weitere Bedingung $y(0) = 1$ gegeben. Setzen wir $x = 0$ in der allgemeinen Lösung ein, so erhalten wir

$$y(0) = C.$$

Aufgrund der gegebenen Bedingung muss dieser Ausdruck nun gleich eins sein. Es folgt somit $C = 1$ und die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$

Diese Funktion heisst *partikuläre Lösung* der Differentialgleichung $y' = x$ zur Bedingung $y(0) = 1$.

1.2.6. *Anfangsbedingungen.* Die Bedingungen, welche zu einer partikulären Lösung führen, können in zwei unterschiedlichen Formen vorliegen. Sind die Bedingungen in einer Weise formuliert, welche zu Werten der gesuchten Funktion und ihrer Ableitungen an einem festen Punkt $x = x_0$ führen, so heissen die Bedingungen *Anfangsbedingungen.*

Betrachten wir beispielsweise die Differentialgleichung des obigen kinematischen Beispiels: $y'' = a$ (für konstantes a) und geben wir Werte für die Position und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ vor, so sind dies Anfangsbedingungen.

Die meisten Probleme der Kinematik oder Dynamik werden als *Anfangswertprobleme* formuliert, i.e. die Differentialgleichung zusammen mit Anfangsbedingungen ist gegeben und es wird die partikuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung zu den gegebenen Anfangsbedingungen gesucht.

1.2.7. *Randbedingungen.* Führen die gegebenen Bedingungen zu Werten der gesuchten Funktion an verschiedenen Werten von x, so heissen die Bedingungen *Randbedingungen.* Das Problem des Auffindens einer partikulären Lösung einer gegebenen Differentialgleichung mit gegebenen Randwerten heisst *Randwertproblem.*

Als Beispiel eines Randwertproblems betrachten wir einen zweiseitig aufgelegten Balken unter Eigenlast und suchen die Auslenkung y in Abhängigkeit der horizontalen Koordinate x. Die Gesetzmässigkeit, welche dieses Problem beschreibt ist die Differentialgleichung der Balkenbiegung

$$y''(x) = \frac{1}{EI} M(x),$$

wobei wir mit E den Elastizitätsmodul des betrachteten Materials, mit I das Widerstandsmoment zweiter Ordnung und mit $M(x)$ das wirkende Moment in Abhängigkeit der horizontalen Koordinate x bezeichnen. Die Länge des Balkens sei L. Aus der konstanten Streckenlast q folgt das Moment $M(x) = \frac{q}{2}(Lx - x^2)$ und die Differentialgleichung wird zu

$$y''(x) = K(Lx - x^2), \qquad \text{mit} \qquad K = \frac{q}{2EI}.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich durch zweifache unbestimmte Integration zu

$$y(x) = K\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1 x + C_2.$$

Die Bedingung der beidseitigen Auflage (bei $x = 0$ und $x = L$) ergibt die Werte

$$y(0) = y(L) = 0.$$

Die beiden Bedingungen in die allgemeine Lösung eingesetzt führt auf die Gleichungen

$$y(0) = C_2 \stackrel{!}{=} 0, \qquad y(L) = K\left(\frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12}\right) + C_1 L$$
$$= \frac{KL^4}{12} + C_1 L \stackrel{!}{=} 0.$$

Somit folgt

$$C_1 = -\frac{KL^3}{12}, \qquad C_2 = 0$$

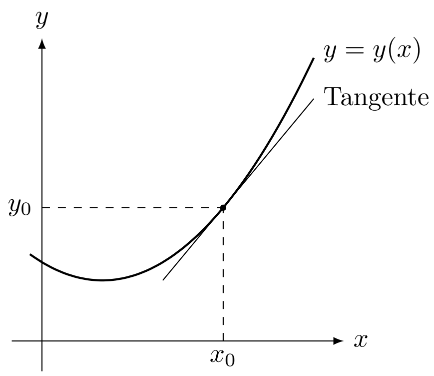
und die partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) &= K\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{L^3 x}{12}\right) \\ &= \frac{q}{24EI}\left(2Lx^3 - x^4 - L^3 x\right). \end{aligned}$$

1.3. **Geometrische Betrachtung: Richtungsfeld.** Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

für eine gegebene Funktion $f(x, y)$. Sei $y(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Im folgenden bezeichnen wir den Graphen $y = y(x)$ als *Lösungskurve*. Sei (x_0, y_0) ein Punkt auf der Lösungskurve $y = y(x)$. Wir betrachten nun die Tangente an die Lösungskurve in diesem Punkt:



Die Steigung dieser Tangente ist gegeben durch

$$m = \frac{dy}{dx}(x_0) = f(x_0, y_0).$$

I.e. die Steigung der Lösungskurve in einem Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch $f(x_0, y_0)$. Insbesondere ist somit die Steigung der Lösungskurve bekannt, ohne Kenntnis der Lösung $y(x)$.

Durch diese Erkenntniss ist für jeden zulässigen Punkt (x_0, y_0) die Richtung der Lösungskurve, welche durch diesen Punkt verläuft, gegeben. Die Darstellung dieser Richtungen als kurzes Tangentenstück wird als *Richtungsfeld* bezeichnet. Wir illustrieren am Beispiel der Gleichung

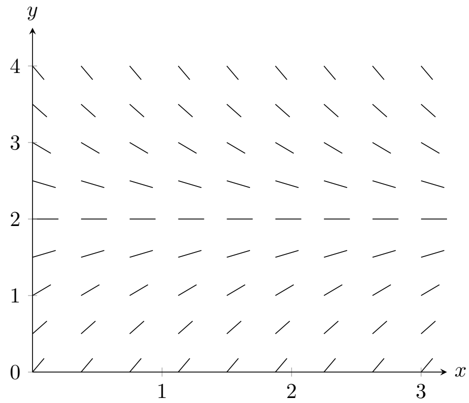
$$\frac{dy}{dx} = 2 - y,$$

für $x \geq 0$. I.e. $f(x, y) = 2 - y$. Für eine effiziente Konstruktion des Richtungsfeldes setzt man die Funktion $f(x, y)$ gleich einer Konstanten m:

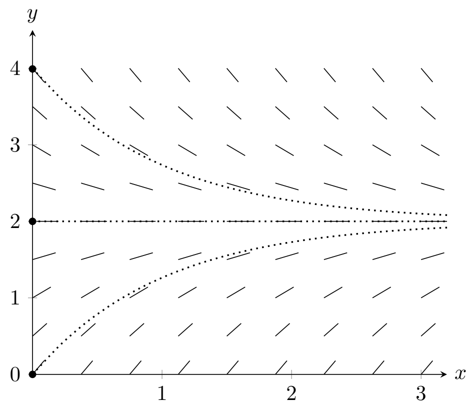
$$f(x, y) = m.$$

Die Lösung dieser Gleichung für festes m wird als *Isokline* bezeichnet. Für die Wahl $m = 0$ ergibt sich die Gleichung $2 - y = 0$ mit Lösung $y = 2$. I.e. entlang der Isokline $y = 2$ ist die Steigung des Richtungsfeldes gleich 0. Für $m = 1$ ergibt sich die Isokline

$y = 1$, für $m = -1$ ergibt sich die Isokline $y = 3$. Wir erhalten das Richtungsfeld:



Lösungskurven $y = y(x)$ der Differentialgleichung verlaufen in jedem Punkt (x, y) parallel zum Richtungsfeld und können somit bei gegebenem Richtungsfeld skizziert werden. Wir skizzieren für das Beispiel drei Lösungskurven, welche durch die Punkte $(x_0, y_0) = (0, 2), (0, 4), (0, 0)$ verlaufen:



Diese drei Lösungskurven entsprechen den drei partikulären Lösungen der Differentialgleichung $y' = 2 - y$ zu den drei Anfangsbedingungen $y(0) = 2, 4, 0$.

Bemerkungen:

(i) Die so skizzierten Lösungskurven entsprechen einem qualitiativen Bild der Lösungen der Differentialgleichung.

(ii) Aus diesem qualitativen Bild lässt sich das Langzeitverhalten ablesen. Mit dem Langzeitverhalten ist das Verhalten der Lösung für $x \to \infty$ gemeint. Im obigen Beispiel sehen wir dass für alle möglichen Anfangsbedingungen jeweils

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 2$$

gilt.

(iii) Die Gesamtmenge der Lösungskurven entspricht der allgmeinen Lösung der Differentialgleichung.

(iv) Durch einen Punkt (x_0, y_0) verläuft genau eine Lösungskurve. Das heisst dass zu einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ genau eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ existiert.

1.4. **Separierbare Gleichungen.**

1.4.1. *Theorie.* Eine Differentialgleichung erster Ordnung heisst *separierbar*, wenn sie in der Form

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

geschrieben werden kann. Mit Argumenten (y ist eine Funktion von x) ist diese Gleichung

$$h(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = g(x).$$

Sei nun $H(x)$ eine Stammfunktion von $h(x)$. Dann kann die linke Seite folgendermassen umgeschrieben werden:

$$h(y(x))\frac{dy}{dx}(x) = \frac{d}{dx}H(y(x)).$$

(Dies folgt aus der Kettenregel, der Ausdruck $\frac{dy}{dx}(x)$ ist die innere Ableitung der verketteten Funktion $H(y(x))$). Die Differentialgleichung ist nun von der Form

$$\frac{d}{dx}H(y(x)) = g(x).$$

Unbestimmte Integration liefert

$$H(y(x)) = G(x) + C,$$

wobei $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$ ist. Das Auflösen dieser Gleichung nach $y(x)$ liefert die allgmeine Lösung $y(x)$. Die partikuläre Lösung ergibt sich durch eine Anfangsbedingung, welche die Konstante C fixiert.

1.4.2. *Formales Vorgehen.* Wir betrachten

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Das formale Vorgehen unterteilt sich in die folgenden Schritte:

(i) Separieren der Variablen
Formale Multiplikation mit dx liefert

$$h(y)dy = g(x)dx.$$

Die linke Seite beinhaltet nur noch die Variable y, die rechte Seite beinhaltet nur noch die Variable x, i.e. die Variablen sind separiert.

(ii) Integration
Unbestimmte Integration

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

liefert

$$H(y) = G(x) + C.$$

Hier sind $H(y)$, $G(x)$ Stammfunktionen von $h(y)$ respektive $g(x)$.

(iii) Auflösen
Auflösen liefert die allgemeine Lösung

$$y(x) = H^{-1}(G(x) + C).$$

Die partikuläre Lösung ergibt sich durch eine Anfangsbedingung, welche die Konstante C fixiert.

Wir illustrieren die einzelnen Schritte am Beispiel

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2x, \qquad y(1) = \frac{1}{25}.$$

(i) Separation:

$$\frac{dy}{y^2} = 6xdx.$$

(ii) Integration:

$$-\frac{1}{y} = 3x^2 + C.$$

(iii) Auflösen ergibt die allgemeine Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{3x^2 + C}.$$

Mit $y(1) = 1/25$ folgt die partikuläre Lösung

$$y(x) = \frac{1}{28 - 3x^2}.$$

Ein wichtiges Beispiel ist die Gleichung

$$y' = ky, \qquad y(0) = 0, \qquad \text{konst.} = k \in \mathbb{R},$$

Separation und unbestimmte Integration liefert

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdx.$$

Ausführen der Integration ergibt

$$\log(y) = kx + C_1.$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y(x) = e^{kx+C_1} &= e^{C_1}e^{kx} \\ &= C_2e^{kx}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ haben wir die partikuläre Lösung

$$y(x) = y_0e^{kx}.$$

Bemerkung: Genau genommen kann die Konstante C_2 in der obigen Herleitung nur positive Werte annehmen da sie aus der Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$ durch $C_2 = e^{C_1}$ hervorgeht. Wir haben jedoch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\log(|x|) &= \begin{cases} \frac{d}{dx}\log(x) & x \geq 0 \\ \frac{d}{dx}\log(-x) & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\int \frac{1}{x}dx = \log(|x|) + C.$$

In der obigen Herleitung haben wir also

$$\log(|y|) = kx + C_1.$$

Dies ergibt

$$|y| = C_2e^{kx}$$

(mit $C_2 = e^{C_1} > 0$) und daraus folgen die Lösungen

$$y = C_2e^{kx}, \qquad y = -C_2e^{kx}.$$

Diese Lösungen zusammen mit der offensichtlichen Lösung[2] $y(x) \equiv 0$ lassen sich aber zusammenfassen zur allgemeinen Lösung

$$y(x) = Ce^{kx}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Diese Lösung stimmt mit der Lösung der obigen 'naiven' Herleitung überein.

Wir fassen das Resultat dieses Beispiels nochmals zusammen: Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y' = ky, \qquad k \in \mathbb{R},$$

lautet

$$y(x) = Ce^{kx}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

1.5. **Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.** Eine Differentialgleichung erster Ordnung heisst *linear* wenn sie in der Form

$$y' = p(x)y + q(x)$$

geschrieben werden kann. Hier sind $p(x)$ und $q(x)$ gegebene Funktionen. Die Funktion $q(x)$ heisst *Störfunktion*. Die Gleichung heisst *homogen* falls $q(x) \equiv 0$, ansonsten *inhomogen*.

Die folgende Tabelle illustriert die eingeführten Begriffe:

Gleichung	linear	homogen	separierbar
$y' = y^2$	nein	-	ja
$y' = x^2$	ja	nein	ja
$y' = e^{-x}y$	ja	ja	ja
$y' = xy + e^{-x}$	ja	nein	nein
$y' = xy + x$	ja	nein	ja

Wir betrachten nun die folgenden beiden Differentialgleichungen:

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{1}$$

$$y' = p(x)y. \tag{2}$$

Man nennt die zweite Gleichung die zugehörige homogene Gleichung zur ersten (inhomogenen) Gleichung (i.e. das ist diejenige Gleichung die man bekommt wenn man bei einer inhomogenen Gleichung die Störfunktion weglässt).

Es gilt das folgende:

(i) Gleichung (2) hat die allgemeine Lösung $y_h(x) = Ce^{P(x)}$, wobei $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$ ist.
(ii) Sei $y_h(x)$ eine Lösung von Gleichung (2) und sei $y_i(x)$ eine Lösung von Gleichung (1). Dann ist die Funktion $y_h(x) + y_i(x)$ eine Lösung von Gleichung (1).
(iii) Zwei Lösungen der Gleichung (1) unterscheiden sich (nur) in einer Lösung der Gleichung (2).

Beweis:

(i) Dies folgt direkt aus der Tatsache dass sich die homogene Gleichung (2) separieren lässt. Siehe den vorhergehenden Abschnitt zu separierbaren Gleichungen.
(ii) Wir setzen die Funktion $y_h(x) + y_i(x)$ in die Gleichung (1) ein:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y_h(x) + y_i(x)) &= \frac{dy_h}{dx}(x) + \frac{dy_i}{dx}(x) \\ &= p(x)y_h(x) + p(x)y_i(x) + q(x) \\ &= p(x)(y_h(x) + y_i(x)) + q(x), \end{aligned}$$

[2] $f(x) \equiv 0$ beduetet dass die Funktion $f(x)$ identisch, also für alle x, gleich Null ist.

wobei wir von der ersten auf die zweite Zeile verwendet haben dass $y_h(x)$ eine Lösung der Gleichung (2) und $y_i(x)$ eine Lösung der Gleichung (1) ist. Dies zeigt dass die Funktion $y_h(x) + y_i(x)$ eine Lösung der Gleichung (1) ist.

(iii) Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der Gleichung (1). I.e. es gilt

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx}(x) &= p(x)y_1(x) + q(x), \\ \frac{dy_2}{dx}(x) &= p(x)y_2(x) + q(x). \end{aligned}$$

Die Differenz $y_1(x) - y_2(x)$ erfüllt somit

$$\frac{d}{dx}(y_1(x) - y_2(x)) = p(x)(y_1(x) - y_2(x)),$$

i.e. die Differenz erfüllt Gleichung (2).

Die folgende Überlegung führt nun auf die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Wir nehmen an wir kennen eine Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Gleichung. Wenn wir nun eine Lösung der homogenen Gleichung dazu addieren erhalten wir wieder eine Lösung der inhomogenen Gleichung (siehe (ii)). Da wir von der homogenen Gleichung beliebig viele Lösungen kennen (wir kennen alle Lösungen dieser Gleichung, i.e. wir kennen die allgemeine Lösung (siehe (i))), können wir diese jeweils zur Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Gleichung dazu addieren und erhalten somit auch beliebig viele Lösungen der inhomogenen Gleichung. Die Frage ist nun ob wir auf diesem Weg alle Lösungen der inhomogenen Gleichung finden? Da sich zwei solche Lösungen aber nur in einer Lösung der homogenene Gleichung unterscheiden (siehe (iii)) und wir zu unserer Lösung alle Lösungen der homogenen Gleichung dazu addieren, bekommen wir in der Tat auf diesem Weg alle Lösungen der inhomogenen Gleichung.

Wir schliessen somit das folgende: Falls wir eine spezielle Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen Gleichung und alle Lösungen $y_h(x)$ der homogenen Gleichung (dies ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung) kennen, dann gibt es für jede beliebige Lösung $y(x)$ der inhomogenen Gleichung eine Lösung $y_h(x)$ der homogenen Gleichung, so dass gilt

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x).$$

I.e. die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Wir notieren dies als Theorem:

Theorem. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = p(x)y + q(x)$$

lautet

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x),$$

wobei $y_h(x) = Ce^{P(x)}$ (mit $P(x)$ einer Stammfunktion von $p(x)$) die allgemeine Lösung der Gleichung $y' = p(x)y$ und $y_i(x)$ eine Lösung der Gleichung $y' = p(x)y + q(x)$ ist.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$y' = -2y + 3.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = -2y$ ist (gefunden durch Separation der Variablen)

$$y_h(x) = Ce^{-2x}.$$

Nun benötigen wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = -2y + 3$. Diese ist $y_i(x) = \frac{3}{2}$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}.$$

Bemerkungen:

(i) Die Gleichung in diesem Beispiel wäre auch direkt durch Separation der Variablen lösbar.

(ii) Die Lösung $y_i(x) = \frac{3}{2}$ wurde durch raten gefunden. Im allgemeinen ist dies nicht so einfach möglich. Ein allgemeineres Verfahren zum Auffinden einer Lösung der inhomogenen Gleichung wird im nächsten Teilabschnitt besprochen (Variation der Konstanten).

(iii) Die verbleibende Konstante C in der Lösung wird durch eine Anfangsbedingung fixiert.

1.5.1. *Variation der Konstanten.* Die Methode mit dem Namen *Variation der Konstanten* wird verwendet um für die lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = p(x)y + q(x)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden.

Das Vorgehen ist das folgende: In der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $y_h(x) = Ce^{P(x)}$ wird die auftretende Konstante C durch eine (noch) unbekannte Funktion $\varphi(x)$ ersetzt, i.e. die Konstante wird variiert. Wir erhalten dadurch den Ansatz

$$y_i(x) = \varphi(x)e^{P(x)}.$$

Einsetzen dieses Ansatzes in die inhomogene Gleichung führt auf eine Differentialgleichung für $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x)e^{P(x)} = q(x).$$

Die Lösung davon ist

$$\varphi(x) = \int q(x)e^{-P(x)}dx$$

und somit lautet die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_i(x) = \varphi(x)e^{P(x)} = e^{P(x)} \int q(x)e^{-P(x)}dx.$$

(Auf der rechten Seite tritt hier ein unbestimmtes Integral auf, welches die Menge der Stammfunktionen von $q(x)e^{-P(x)}$ bezeichnet. Bei der Ausführung der Integration kann die Integrationskonstante weggelassen werden, da wir nur an einer Lösung der inhomogenen Gleichung interessiert sind). Mit $y(x) = y_h(x) + y_i(x)$ erhalten wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = p(x)y + q(x)$:

$$y(x) = Ce^{P(x)} + e^{P(x)} \int q(x)e^{-P(x)}dx,$$

wobei $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$ ist.

Mit dieser zusätzlichen Erkenntnis erweitern wir das Theorem aus dem vorhergehenden Abschnitt.

Theorem. Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = p(x)y + q(x)$$

lautet

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x),$$

wobei

$$y_h(x) = Ce^{P(c)}, \qquad y_i(x) = e^{P(x)} \int q(x)e^{-P(x)}dx$$

(mit $P(x)$ einer Stammfunktion von $p(x)$). Hier ist $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = p(x)y$ und $y_i(x)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = p(x)y + q(x)$.

Bemerkungen:

(i) Wie oben bereits vermerkt kann bei der Ausführung der Integration die Integrationskonstante weggelassen werden, da wir nur an einer Lösung der inhomogenen Gleichung interessiert sind und durch die Addition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten.

(ii) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung enthält eine Konstante C. Diese steckt in $y_h(x)$. Wie üblich wird C durch eine Anfangsbedingung fixiert und ergibt auf diese Weise eine partikuläre Lösung.

(iii) Für Anwendungen empfielt es sich nicht die obigen Formeln zu merken. Man verwendet das folgende Vorgehen:

(a) Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $y_h(x)$ durch Separation der Variablen.

(b) Berechnung einer Lösung der inhomogenen Gleichung $y_i(x)$ durch Variation der Konstanten.

(c) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist $y(x) = y_h(x) + y_i(x)$.

Wir illustrieren die Schritte am Beispiel

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^4}.$$

(a) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Separation ergibt

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \text{i.e.} \qquad y_h(x) = Cx.$$

(b) Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz (Variation der Konstanten)

$$y_i(x) = \varphi(x)x.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\varphi'(x)x + \varphi(x) = \varphi(x) + \frac{1}{x^4}, \qquad \text{i.e.} \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{x^5}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4x^4}$$

(wir lassen die Integrationskonstante weg da wir nur an einer Lösung der inhomogenen Gleichung interessiert sind). Somit haben wir

$$y_i(x) = -\frac{1}{4x^3}.$$

(c) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_i(x) \\ &= Cx - \frac{1}{4x^3}. \end{aligned}$$

1.6. **Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.** Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung heisst linear wenn sie von der Form

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

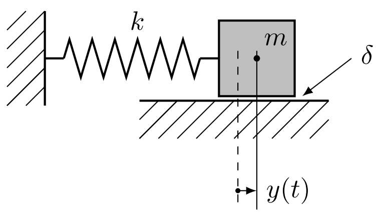
ist. Wir nennen die Funktion $r(x)$ *Störfunktion*. Im Fall $r(x) \equiv 0$ bezeichnen wir die Gleichung als homogen, ansonsten als inhomogen. Im folgenden beschränken wir uns auf den wichtigen Fall wo p, q Konstanten sind, i.e. die Koeffizienten der Gleichung sind konstant.

1.6.1. *Homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten.* Eine homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Wobei $p, q \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

Eine wichtige Klasse von Systemen, in welchen eine Gleichung dieser Form zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens auftritt, ist die Klasse von mechanischen Systemen bestehend aus Masse, Feder und geschwindigkeitsproportionaler Reibung. Als Vertreter für Systeme dieser Art betrachten wir die folgende Anordnung:



Es handelt sich um eine Masse, welche sich horizontal (in einer Dimension) bewegen kann. Die Masse ist über eine (lineare) Feder mit der festen Struktur verbunden und es wirkt auf die Masse eine Reibungskraft welche proportional zur Geschwindigkeit ist.

Wir bezeichnen mit m die Masse, mit k die Federkonstante, mit δ den Reibungskoeffizienten und mit $y(t)$ die Auslenkung aus der (gestrichelt eingezeichneten) Ruhelage. Die Auslenkung besitzt ein Vorzeichen und ist rechts von der Ruhelage positv. Die einwirkenden Kräfte sind die Federkraft F_F und die Reibungskraft F_R. In Abhängigeit der Auslenkung $y(t)$ und der Geschwindigkeit $y'(t)$ sind diese

$$F_F = -ky(t), \qquad F_R = -\delta y'(t).$$

Aus dem Newtonschen Gesetz folgt

$$-ky(t) - \delta y'(t) = my''(t),$$

i.e.

$$y'' + \frac{\delta}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0.$$

Diese Gleichung ist somit von der Form einer homogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: $y'' + py' + qy = 0$, wobei $p = \delta/m$ und $q = k/m$.

1.6.2. *Erste Lösungen im Fall $p = 0$.* Mit $p = 0$ ist die Differentialgleichung von der Form

$$y'' + \omega_0^2 y = 0,$$

wobei wir die Grösse $\omega_0 = \sqrt{q}$ eingeführt haben. Aus der Sicht des mechanischen Systems beschreibt die Differentialgleichung in dieser Form ein System ohne Reibung. Wir erwarten somit Lösungen in der Form von harmonischen Schwingungen. Durch Einsetzen sieht man sofort dass

$$y_1(x) = \sin(\omega_0 x), \qquad y_2(x) = \cos(\omega_0 x)$$

Lösungen der Gleichung sind. Diese Lösungen besitzen Amplituden von Eins. Aus der Sicht des mechanischen Systems erwarten wir jedoch Lösungen mit beliebigen (aber konstanten) Amplituden. In der Tat sind Vielfache der obigen beiden Lösungen wieder Lösungen der Gleichung. Beispielsweise

$$y_3(x) = 7\sin(\omega_0 x), \qquad y_4(x) = -19\cos(\omega_0 x).$$

Da die Sinus- und Kosinuslösungen sehr speziellen Anfangsbedingungen entsprechen (Sinus: Keine Auslenkung und maximale Geschwindigkeit, Kosinus: Maximale Auslenkung und keine Geschwindigkeit), erwarten wir eine allgemeine harmonische Schwingung als allgemeine Lösung. Diese kann in der Form

$$y(x) = C_1 \sin(\omega_0 x) + C_2 \cos(\omega_0 x)$$

geschrieben werden, i.e. als Linearkombination der Lösungen $y_1(x) = \sin(\omega_0 x)$, $y_2(x) = \cos(\omega_0 x)$. Man überprüft durch Einsetzen dass Funktionen dieser Form Lösungen der Differentialgleichung sind.

1.6.3. *Superpositionsprinzip.* Die Erkenntnisse aus den den ersten Lösungen führen auf den folgenden Satz:

Theorem 1.1 (Superpositionsprinzip)**.** *Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung*

$$y'' + py' + qy = 0$$

und seien C_1, C_2 Konstanten. Dann ist die Linearkombination

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

auch eine Lösung von $y'' + py' + qy = 0$.

Beweis:
Wir setzen die Linearkombination $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' \\ + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + pC_1 y_1' + pC_2 y_2' + qC_1 y_1 + qC_2 y_2 \\ &= C_1 \underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{=0} + C_2 \underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{=0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile verwendet haben dass $y_1(x)$, $y_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung sind. Somit ist die Linearkombination $C_1 y_1 + C_2 y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung.

Bemerkung: Das Superpositionsprinzip gilt für alle linearen homogenen Differentialgleichungen (auch mit nicht-konstanten Koeffizienten), zum Beispiel auch für die lineare, homogene Differentialgleichung erster Ordnung $y' = p(x)y$ des vorhergehenden Abschnitts.

Es stellt sich nun die Frage ob durch die Linearkombination

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

alle Lösungen der Differentialgleichung gefunden werden. Es gilt das folgende: Die allgemeine Lösung der Gleichung $y'' + py' + qy = 0$ ist als Linearkombination $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ darstellbar, falls $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängige Lösungen sind. Die beiden Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$ heissen in diesem Fall *Basislösungen* oder *Fundamentallösungen* der Differentialgleichung.

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit für zwei Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$ ist folgendermassen definiert ist: Zwei gegebene Funktionen $y_1(x)$, $y_2(x)$ sind linear unabhängig, falls die Gleichung

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0,$$

welche für alle x gelten muss (Achtung: Dies ist keine Gleichung für x sondern für die Konstanten C_1, C_2), nur die Lösung $C_1 = C_2 = 0$ besitzt (die Definition ist analog zur Definition der linearen Unabhängigkeit von Vektoren). Wir illustrieren den Begriff am Beispiel der Funktionen $y_1(x) = \cos(\omega_0 x)$, $y_2(x) = \sin(\omega_0 x)$. Die Gleichung lautet

$$C_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x) = 0.$$

Da die Gleichung für alle x gelten muss, können beliebige Werte für x eingesetzt werden um die Gleichung zu untersuchen. Wir setzen $x = 0$ und erhalten $C_1 = 0$. Die Gleichung reduziert sich auf $C_2 \sin(\omega_0 x) = 0$ deren einzige Lösung $C_2 = 0$ ist. Ein Gegenbeispiel sind die Funktionen $y_1(x) = 3\sin(\omega_0 x)$, $y_2(x) = 7\cos(\omega_0 x)$. Die Gleichung der Linearkombination ist

$$C_1 3 \sin(\omega_0 x) + C_2 7 \sin(\omega_0 x) = 0.$$

Eine Lösung davon ist beispielsweise $C_1 = -\frac{7}{3}$, $C_2 = 1$. Diese Funktionen sind somit nicht linear unabhängig.

1.6.4. *Aufsuchen der Basislösungen und allgemeine Lösung.* Wir suchen die allgemeine Lösung der Gleichung $y'' + py' + qy = 0$. Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ ergibt

$$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) e^{\lambda x} = 0,$$

i.e.

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Somit ist $y(x) = e^{\lambda x}$ genau dann eine Lösung wenn λ eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms* $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ ist. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

und es sind die drei Fälle

$$\text{(i)} \quad p^2 - 4q > 0, \qquad \text{(ii)} \quad p^2 - 4q = 0, \qquad \text{(iii)} \quad p^2 - 4q < 0$$

zu unterscheiden. Bemerkung: Wir lassen für λ Werte in den komplexen Zahlen zu. Durch die Werte von λ in den drei Fällen ergeben sich nun folgendermassen die zugehörigen Basislösungen:

(i) $p^2 - 4q > 0$: Diesen Fall nennt man *starke Dämpfung.* Es gilt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Somit sind die beiden Basislösungen $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

(ii) $p^2 - 4q = 0$: Diesen Fall nennt man *Kritische Dämpfung*. Es gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = -p/2 \in \mathbb{R}$. Somit ist $e^{\lambda_1 x}$ eine Basislösung. Man kann zeigen (als Übung) dass die Funktion $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ im Fall kritischer Dämpfung die Funktion $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ auch eine Lösung ist. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda_1 x}, \qquad \lambda_1 = -\frac{p}{2}.$$

(iii) $p^2 - 4q < 0$: Diesen Fall nennt man *schwache Dämpfung*. Es gilt $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, i.e. $\lambda_1 = \alpha + j\beta$, $\lambda_2 = \alpha - j\beta$, wobei $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{4q - p^2}/2$. Die Basislösungen sind $y_1(x) = e^{(\alpha + j\beta)x}$, $y_1(x) = e^{(\alpha - j\beta)x}$ und die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{(\alpha+j\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-j\beta)x} \\ &= e^{\alpha x}\left(C_1 e^{j\beta x} + C_2 e^{-j\beta x}\right). \end{aligned}$$

Diese Lösung ist im allgemeinen nicht reell. Die Wahl von $C_1 = \overline{C_2}$, mit $C_1 = a + jb$ führt auf

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha x}\Big((a + jb)(\cos(\beta x) + j\sin(\beta x)) \\ &\qquad + (a - jb)(\cos(-\beta x) + j\sin(-\beta x))\Big) \\ &= e^{\alpha x}\Big(2a\cos(\beta x) - 2b\sin(\beta x)\Big), \end{aligned}$$

wobei wir die Eulersche Formel $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$ sowie $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ und $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ verwendet haben. Diese Lösung ist reell. Umbenennung der verbleibenden (reellen) Konstanten ergibt den folgenden Ausdruck für die allgemeine Lösung

$$y(x) = e^{\alpha x}\Big(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\Big), \qquad \alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Bemerkungen:

(i) Es lässt sich prüfen dass die erhaltenen zwei Basislösungen jeweils linear unabhängige Funktionen sind.

(ii) Die erhaltene allgemeine Lösung im Fall der schwachen Dämpfung lässt sich umschreiben auf die Form

$$y(x) = Ce^{\alpha x}\cos(\beta x + \phi).$$

1.6.5. *Diskussion der Lösungen.* In Verbindung mit dem mechanischen Feder-Masse-Dämpfungssystem diskutieren wir nun die erhaltenen allgemeinen Lösungen. Zur Vereinfachung führen wir die Grösse $\Delta = \frac{\delta}{2m}$ ein. Die Differentialgleichung mit den zugehörigen Lösungen des charakteristischen Polynoms ist nun

$$y'' + 2\Delta y' + \omega_0^2 y = 0, \qquad \lambda_{1,2} = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \omega_0^2},$$
$$\Delta = \frac{\delta}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

(i) Starke Dämpfung. Übertragen auf das mechanische System wird die Bedingung $p^2 - 4q > 0$ zu

$$\Delta > \omega_0.$$

Die allgemeine Lösung für die Auslenkung $y(t)$ lautet

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad \lambda_{1,2} = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \omega_0^2}.$$

Wegen $\Delta^2 - \omega_0^2 < \Delta^2$, folgt dass $\lambda_{1,2} < 0$. Somit ist die Auslenkung im Fall starker Dämpfung exponentiell fallend.

(ii) Kritische Dämpfung. Übertragen auf das mechanische System wird die Bedingung $p^2 - 4q = 0$ zu

$$\Delta = \omega_0.$$

Die allgemeine Lösung für die Auslenkung $y(t)$ lautet

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\Delta t}.$$

Auch im Fall kritischer Dämpfung fällt die Auslenkung exponentiell ab.

(iii) Schwache Dämpfung. Übertragen auf das mechanische System wird die Bedingung $p^2 - 4q < 0$ zu

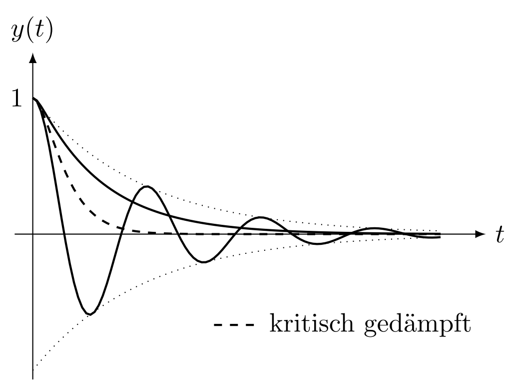
$$\Delta < \omega_0.$$

Die allgemeine Lösung für die Auslenkung $y(t)$ lautet

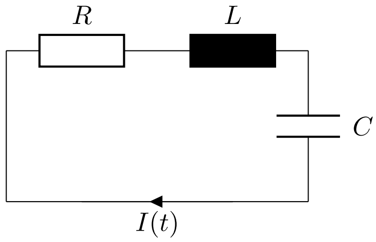
$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\Delta t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \\ &= Ce^{-\Delta t} \cos(\beta t + \phi), \qquad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}. \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine gedämpfte Schwingung (die Amplitude nimmt mit der Zeit ab). Ein Spezialfall tritt auf wenn keine Reibung vorhanden ist: $\delta = 0$ führt auf $\Delta = 0$ und die Schwingung ist ungedämpft (Amplitude nimmt nicht ab), die auftretende Frequenz ist ω_0. Aus diesem Grund nennt man ω_0 auch die *Eigenfrequenz* des Systems.

Die folgende Grafik stellt die drei Fälle gegenüber. Es wurden die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ gewählt. Diese Anfangsbedingungen entsprechen dem loslassen der Masse m bei Auslenkung gleich Eins. Die drei Lösungen entsprechen Systemen mit der selben Masse und der selben Federkonstanten. Lediglich der Reibungskoeffizient ist unterschiedlich gewählt. Die Umhüllenden Kurven $y(x) = \pm e^{-\Delta t}$ der Schwingungslösung (schwache Dämpfung) sind gepunktet eingezeichnet und geben die Abnahme der Amplitude wieder. Gestrichelt eingezeichnet ist das System mit kritischer Dämpfung. Es ist ersichtlich dass das stark gedämpfte System langsamer in die Ruhelage zurückkehrt als das kritisch gedämpfte.



1.6.6. *Elektrische Schwingungen.* Wir betrachten die folgende Serieschaltung eines Ohmschen Widerstandes R, einer Spule L und einem Kondensator C:



Seien U_R, U_L und U_C die (zeitabhängigen) Spannungsabfälle über dem jeweiligen Bauteil. Nach der Maschenregel gilt zu jedem Zeitpunkt

$$U_R + U_L + U_C = 0.$$

Mit

$$U_R = RI, \qquad U_L = L\frac{dI}{dt}, \qquad U_C = \frac{Q}{C}.$$

folgt

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Ableiten nach der Zeit ergibt die folgende Differentialgleichung für den Strom $I(t)$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0,$$

wobei wir benutzt haben dass $dQ/dt = I$. Dies ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, i.e. die Gleichung ist von der selben Form wie die Gleichung welche das mechanische Feder-Masse-Dämpfungssystem beschreibt.

Wir stellen die Grössen, welche einander in diesen Systemen analog sind, in der folgenden Tabelle gegenüber (man vergleiche die entsprechenden Differentialgleichungen):

mechanisch	elektrisch
Auslenkung $y(t)$	Stromstärke $I(t)$
Masse m	Induktion L
Reibungskoeffizient δ	Widerstand R
Federkonstante k	1/Kapazität $1/C$

Zum Beispiel entspricht der Masse m, welche im mechanischen System die Trägheit beschreibt, im elektrischen System die Induktivität L. Da nun beide Systeme mathematisch gleich beschrieben werden, können Erkenntnisse über die Lösung eines Systems direkt auf das andere System übertragen werden.

Beispiel: In einem mechanischen System ohne Reibung ($\delta = 0$) ist die Frequenz der Schwingung $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Somit schwingt ein elektrischer Schaltkreis ohne Ohmschen Widerstand ($R = 0$) mit der Frequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

1.6.7. *Inhomogene Gleichung.* Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zusätzlich besitzt die Gleichung auf der rechten Seite eine Störfunktion $r(x)$, i.e. wir betrachten die inhomogene Gleichung

$$y'' + py' + qy = r(x).$$

Im mechanischen Feder-Masse-Dämpfungssystem entspricht die Störfunktion $r(x)$ einer äusseren, zeitabhängigen Kraft welche auf die Masse wirkt. In diesem (und dem analogen elektrischen) Zusammenhang nennt man $r(x)$ auch *Anregung*.

Im folgenden werden wir die Notation

$$Ly = y'' + py' + qy$$

benutzen. Die betrachtete inhomogene Gleichung und die dazugehörige homogene Gleichung lauten in dieser Notation

$$Ly = r(x), \qquad Ly = 0.$$

Es gilt das folgende:

Theorem 1.2.

(i) *Sei $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $Ly = 0$ (wobei $y_1(x)$, $y_2(x)$ die Basislösungen sind) und sei $y_i(x)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung $Ly = r(x)$. Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung $Ly = r(x)$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_i(x) \\ &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_i(x). \end{aligned}$$

I.e. die allgemeine Lösung ist gegeben durch die Superposition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer Lösung der inhomogenen Gleichung.

(ii) *Sei $y_1(x)$ eine Lösung der Gleichung $Ly = r_1(x)$ und sei $y_2(x)$ eine Lösung der Gleichung $Ly = r_2(x)$. Dann ist $y_1(x) + y_2(x)$ eine Lösung von $Ly = r_1(x) + r_2(x)$.*

Die Aussage (und auch der Beweis) des ersten Teils ist analog zur linearen Differentialgleichung erster Ordnung. Auch hier benötigen wir somit für die allgemeine Lösung eine Lösung der inhomogenen Gleichung (die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung wurde in den vorhergehenden Teilabschnitten besprochen).

Im Fall der linearen Gleichung erster Ordnung wurde die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten gefunden. Im vorliegenden Fall ist das Vorgehen das fogende:

(i) In Abhängigkeit der Form von $r(x)$ macht man einen der folgenden Ansätze für $y_i(x)$:

Form von $r(x)$	Ansatz für $y_i(x)$
$ae^{\beta x}$	$Ae^{\beta x}$
$a\cos(\beta x)$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$
$a\sin(\beta x)$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$
x^n	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0$

Wobei A, B, A_n, A_{n-1}, …, A_0 (unbekannte) Konstanten sind.

(ii) Der Ansatz wird in die Gleichung $y'' + py' + qy = r(x)$ eingesetzt und die Konstanten werden bestimmt. Führt der Ansatz auf

$$y_i'' + py_i' + qy_i = 0,$$

(i.e. der Ansatz ist eine Lösung der homogenen Gleichung), so ist der Ansatz mit x zu multiplizieren.

Wir illustrieren an Beispielen (die Beispiele beinhalten jeweils auch die Lösung der homogenen Gleichung):

(i) Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5x}.$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$y_i(x) = Ae^{5x}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$(25A - 20A - 12A)e^{5x} = 3e^{5x},$$

i.e. $A = -\frac{3}{7}$ und die Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y_i(x) = -\frac{3}{7}e^{5x}.$$

Die dazugehörige homogene Gleichung lautet

$$y'' - 4y' - 12y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 12$, die Nullstellen davon sind $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$ und somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{6x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_i(x) \\ &= C_1e^{-2x} + C_2e^{6x} - \frac{3}{7}e^{5x}. \end{aligned}$$

(ii) Wie suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' + 3y' + 2y = x^2.$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$y_i(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$

i.e.

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C = x^2.$$

Koeffizientenvergleich ergibt die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 &: & 2A &= 1, \\ x^1 &: & 6A + 2B &= 0, \\ x^0 &: & 2A + 3B + 2C &= 0. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{3}{2}, \qquad C = \frac{7}{4},$$

i.e.

$$y_i(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Die dazugehörige homogene Gleichung lautet

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, die Nullstellen davon sind $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ und somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x)$$

$$= C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

(iii) Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$$

Für eine Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz

$$y_i(x) = Ae^{-x}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$(A - 3A + 2A)e^{-x} = e^{-x}.$$

Die linke Seite verschwindet jedoch, i.e. der Ansatz $y_i(x) = Ae^{-x}$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Wir multiplizieren den Ansatz mit x und bekommen den neuen Ansatz

$$y_i(x) = Axe^{-x}.$$

Die Ableitungen davon sind

$$y_i'(x) = A(1-x)e^{-x}, \qquad y_i''(x) = A(x-2)e^{-x}.$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt

$$A(x - 2 + 3(1-x) + 2x)e^{-x} = e^{-x},$$

i.e.

$$Ae^{-x} = e^{-x}.$$

Somit folgt $A = 1$ und

$$y_i(x) = xe^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen Gleichung lautet (siehe vorhergehendes Beispiel)

$$y_h(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_i(x) \\ &= C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + xe^{-x}. \end{aligned}$$

1.6.8. *Inhomogenes Feder-Masse-Dämpfungssystem.* Wir betrachten das Feder-Masse-Dämpfungssystem mit einer zusätzlich auf die Masse wirkenden Kraft $F_0\cos(\omega t)$, i.e. wir betrachten die Gleichung

$$y'' + 2\Delta y' + \omega_0^2 y = F_0\cos(\omega t).$$

(Zur Erinnerung: $\Delta = \delta/(2m)$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, wobei δ der Reibungskoeffizient, m die Masse und k die Federkonstante ist). Wir nehmen an wir befinden uns im Fall schwacher Dämpfung, i.e. es gelte $\Delta^2 - \omega_0^2 < 0$.

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\Delta\lambda + \omega_0^2$. Die Nullstellen davon sind $\lambda_\pm = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \omega_0^2} = -\Delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}$. Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = e^{-\Delta t}\left(C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t)\right).$$

Da $r(t) = F_0\cos(\omega t)$, machen wir zur Lösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz

$$y_i(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Wir haben

$$y_i'(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t),$$
$$y_i''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t).$$

Eingesetzen in der Differentialgleichung ergibt

$$\cos(\omega t)\left(-A\omega^2 + 2\Delta B\omega + \omega_0^2 A\right)$$
$$+\sin(\omega t)\left(-B\omega^2 - 2\Delta A\omega + \omega_0^2 B\right) = F_0 \cos(\omega t).$$

Setzen von $t = 0$ ergibt

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\Delta B\omega = F_0,$$

setzen von $t = \frac{\pi}{2}$ ergibt

$$-2\Delta A\omega + B(\omega_0^2 - \omega^2) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem für A und B. Auflösen ergibt

$$A = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta\omega^2}, \qquad B = \frac{2F_0\Delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta\omega^2}.$$

Somit ist $y_i(t)$ gegeben durch

$$y_i(t) = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta\omega^2}\cos(\omega t) + \frac{2F_0\Delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta\omega^2}\sin(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung zerfällt exponentiell und somit ist für grosse Zeiten nur die obige inhomogene Lösung relevant. Zur weiteren Betrachtung verwenden wir die Form

$$y_i(t) = C\cos(\omega t + \phi),$$

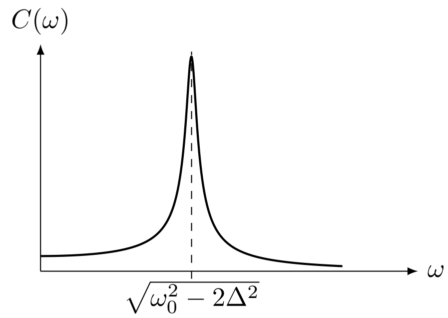
wobei

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \tan(\phi) = -\frac{B}{A}.$$

Die Diskussion der Phase ϕ lassen wir weg und betrachten nur die Amplitude

$$C = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta^2\omega^2}}.$$

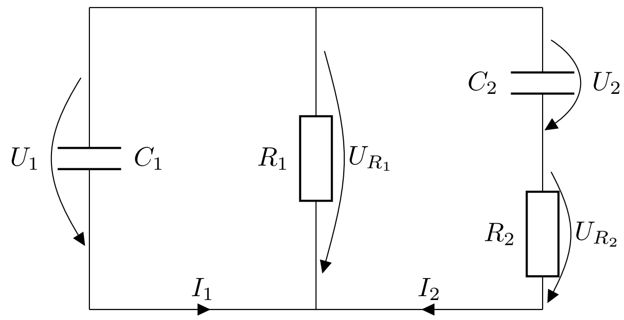
Bei einem gegebenen System (i.e. Masse, Feder und Reibungskoeffizient vorgegeben) ergibt sich in Abhängigkeit von der Frequenz ω der Anregungskraft das folgende *Resonanzverhalten* (siehe Übung):



Die Funktion $C(\omega)$ wird auch *Amplitudenfreqenzgang* genannt.

1.7. **Systeme von Differentiagleichungen.**

1.7.1. *Einführendes Beispiel.* Wir betrachten den folgenden Schaltkreis:



Der Maschensatz angewendet auf die rechte Masche ist $U_2+U_{R_2} = U_{R_1}$, der Maschensatz angewendet auf die linke Masche ist $U_1 = U_{R_1}$. Mit $U_{R_1} = -R_1(I_1+I_2)$ und $U_{R_2} = R_2 I_2$ ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Ströme durch die beiden Kondensatoren in Abhängigkeit der Spannungen:

$$\begin{cases} I_1 = -\dfrac{1}{R_1}U_1 + \dfrac{1}{R_2}(U_2 - U_1), \\ I_2 = \dfrac{1}{R_2}(U_1 - U_2). \end{cases}$$

Für einen Kondensator der Kapazität C gilt $U = \frac{Q}{C}$. Die Ableitung nach der Zeit ergibt $U' = \frac{Q'}{C} = \frac{I}{C}$ und somit gilt für den Strom $I = CU'$. Eingesetzt für die linken Seiten im obigen Gleichungssystem ergibt das folgende System von Differentialgleichungen für die Spannungen an den Kondensatoren:

$$\begin{cases} U_1' = -\dfrac{1}{R_1C_1}U_1 + \dfrac{1}{R_2C_1}(U_2 - U_1), \\ U_2' = \dfrac{1}{R_2C_2}(U_1 - U_2). \end{cases}$$

1.7.2. *Matrix Schreibweise.* Ein lineares, homogenes Gleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist von der Form

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases}$$

Mit

$$\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

lässt sich das Gleichungssystem schreiben als

$$\overrightarrow{y}'(x) = A\overrightarrow{y}(x).$$

Diese Schreibwese heisst *Matrixschreibweise*, die Matrix A heisst *Koeffizientenmatrix.* Die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen ist somit eine Vektorwertige Funktion $\overrightarrow{y}(x)$.

Für das einführende Beispiel der Kondensatorspannungen mit $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $C_1 = 1$ und $C_2 = 1/2$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{cases} U_1' = -U_1 + \dfrac{1}{2}(U_2 - U_1), \\ U_2' = (U_1 - U_2). \end{cases}$$

In Matrixschreibweise

$$\overrightarrow{U}' = A\overrightarrow{U},$$

wobei

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.7.3. *Superpositionsprinzip.* Wir zeigen das Superpositionsprinzip für Systeme von Differentialgleichungen. Wir betrachten die Gleichung $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$. Seien $\overrightarrow{y}_1(x)$ und $\overrightarrow{y}_2(x)$ Lösungen dieser Gleichung. Dann ist auch die die Linearkombination $\mu\overrightarrow{y}_1(x) + \mu\overrightarrow{y}_2(x)$ eine Lösung, wobei μ, ν Konstanten sind. Die nennt man das *Superpositionsprinzip.* Beweis:
Wir setzen die Superposition in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(\mu\overrightarrow{y}_1(x) + \mu\overrightarrow{y}_2(x)\Big) &= \frac{d}{dx}\Big(\mu\overrightarrow{y}_1(x)\Big) + \frac{d}{dx}\Big(\nu\overrightarrow{y}_2(x)\Big) \\ &= \mu\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}_1 + \nu\frac{d}{dx}\overrightarrow{y}_2 \\ &= \mu A\overrightarrow{y}_1 + \nu A\overrightarrow{y}_2 \\ &= A\Big(\mu\overrightarrow{y}_1(x) + \nu\overrightarrow{y}_2(x)\Big), \end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten auf die dritte Zeile verwendet haben dass $\overrightarrow{y}_1(x)$, $\overrightarrow{y}_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung sind.

1.7.4. *Entkoppeltes System.* Ein System von Differentialgleichungen, welches in der Form $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ mit A eine Diagonalmatrix geschrieben werden kann, heisst entkoppeltes System. Als Beispiel betrachten wir

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \qquad \text{wobei} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Als Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1, \\ y_2' = -5y_2. \end{cases}$$

Die beiden Gleichungen können unabhängig voneinander gelöst werden, i.e. das System ist enkoppelt. Wir haben

$$y_1 = C_1 e^{3x}, \qquad y_2 = C_2 e^{-5x}.$$

In Vektorform

$$\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} C_1 e^{3x} \\ C_2 e^{-5x} \end{pmatrix},$$

oder

$$\overrightarrow{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5x}.$$

1.7.5. *Allgemeiner Fall.* Wir betrachten $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ und machen für die Lösung den Ansatz

$$\overrightarrow{y}(x) = \overrightarrow{v} e^{\lambda x}.$$

Eingesetzt in der Gleichung $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ ergibt

$$\lambda\overrightarrow{v} e^{\lambda x} = A\overrightarrow{v} e^{\lambda x},$$

i.e.

$$\lambda\overrightarrow{v} = A\overrightarrow{v}.$$

Somit ist $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{v} e^{\lambda x}$ eine Lösung von $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$, genau dann wenn $\overrightarrow{v}$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ ist.

2. Übungen zu gewöhnliche Differentialgleichungen

Übung 1

Man bestimme die Ordnung der folgenden Differentialgleichungen für $y(x)$.

(i) $y' = x$
(ii) $y' + y = x$
(iii) $y'' = y$
(iv) $y' = y^2$
(v) $y''' + 2y' = e^{-x}$
(vi) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = x$

Übung 2

Man schreibe die folgenden Gleichungen in Form einer expliziten Differentialgleichung, i.e. in der Form

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

und gebe die Funktion G an.

(i) $yy' = x$
(ii) $x^2y' = y + x$
(iii) $y' + y = x$
(iv) $\frac{d}{dx}(xy) = x$
(v) $y'' - y' = 0$
(vi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = x$
(vii) $\frac{d}{dx}\left(\log(xy) + y + 17x\right) = 0$

Übung 3

Man prüfe dass $y(x) = 1/(1-x)$ eine Lösung der Gleichung $y' = y^2$ ist.

Übung 4

Man prüfe dass $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ eine Lösung der Gleichung $yy' + x = 0$ ist.

Übung 5

Man gebe die allgemeine Lösung der Gleichung $xy' = 1$ an.

Übung 6

Man zeige dass die Funktion $y(x) = \arctan(x)$ eine Lösung der Gleichung $(x^2+1)y' = 1$ ist.

Übung 7

Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen der Gleichung $y'' = 9y$?

$$\text{(i) } e^{3x}, \qquad \text{(ii) } e^{-3x}, \qquad \text{(iii) } \sinh(3x), \qquad \text{(iv) } \cosh(3x).$$

Hinweis:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Übung 8

Man zeige dass $y(x) = xe^{-x}$ eine partikuläre Lösung der Gleichung $y'' + 2y' + y = 0$ ist.

Übung 9

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0.$$

(i) Man zeige dass die folgenden Funktionen Lösungen dieser Differentialgleichungen sind (für $x > 0$):

$$y_0(x) = x^{-3/2}, \quad y_1(x) = x^{-1/2}, \quad y_2(x) = -9x^{-3/2}, \quad y_3(x) = 7x^{-1/2},$$
$$y_4(x) = -9x^{-3/2} + 7x^{-1/2}.$$

(ii) In Anbetracht dieser Lösungen finde man weitere Lösungen.

(iii) Man bestimme die eindeutige Lösung unter den Bedingungen

$$y(4) = 1/8, \qquad y'(4) = -3/64.$$

Übung 10

Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = x + y.$$

(i) Man skizziere das Richtungsfeld im Bereich $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.

(ii) Man skizziere die Lösungskurve zu den Anfangsbedingungen $y(0) = -2, -1, 0$ im betrachteten Gebiet.

(iii) Man bestimme das Langzeitverhalten von Lösungen für $x \to \infty$ in Abhängigkeit von Anfangsbedingungen $y(0)$.

Übung 11

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$y' = \sin(x).$$

(i) Man skizziere das Richtungsfeld im Gebiet $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [-2, 2]$.

(ii) Man bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung.

(iii) Man bestimme die partikuläre Lösung zu der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und skizziere diese im Richtungsfeld.

Übung 12

Wir betrachten den freien Fall einer Masse $m = 10$ mit Anfangsgeschwindigkeit unter Einfluss des turbulenten Strömungswiderstandes in der Nähe der Marsoberfläche und interessieren uns für die Geschwindigkeit $v(t)$ dieser Masse. Der Strömungswiderstand ist proportional zu $v(t)^2$ und der Proportionalitätsfaktor sei -10 (negativ da entgegengesetzt zur Geschwindigkeitsrichtung). Für die Beschleunigung durch Gravitation setze man $g = 4$ (alle Angaben in SI-Einheiten).

(i) Man benutze das Newtonsche Gesetz und zeige dass die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = 4 - v^2$$

die Geschwindigkeit $v(t)$ beschreibt.

(ii) Man zeichne für diese Differentialgleichung (qualitativ) das Richtungsfeld im Bereich $(t, v) \in [0, 2] \times [0, 4]$.

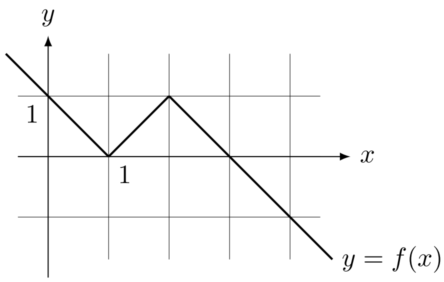
(iii) Für die Anfangsbedingungen $v(0) = 0$, $v(0) = 2$ und $v(0) = 4$ zeichne man qualitativ die Lösungen ein und bestimme das Langzeitverhalten.

Übung 13

Man betrachte die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

wobei die Funktion $f(x)$ durch den folgenden Graphen gegeben ist:



(i) Man skizziere das Richtungsfeld für den Bereich $(t, x) \in [0, 3] \times [0, 4]$.

(ii) Man skizziere die drei Lösungskurven zu den Anfangswerten $x_0 = 0.2, 1.2, 3.8$.

(iii) Man bestimme den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$ für die gegebenen Anfangswerte.

Übung 14

Man betrachte die Differentialgleichung

$$y' = y.$$

(i) Man zeichne (qualitativ) das Richtungsfeld.

(ii) Man zeichne Lösungskurven zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, 2, 1/2, -1$ ein

(iii) Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Übung 15

Man finde die allgmeine Lösung der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)xy^2.$$

Übung 16

Man versuche die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y}{x - y}$$

mit der Methode der Separation der Variablen zu lösen.

Übung 17

Man löse die folgenden Gleichungen:

(i) $x^2y' = y^2$

(ii) $y'(1+x^2) = xy$

(iii) $y' \sin(y) = -x$

(iv) $y' - \sqrt{y} = 0$

Übung 18

Man bestimme die allgemeine und partikuläre Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

(i) $x^2y' + y^2 = 0, \qquad y(0) = 0$

(ii) $y' = 9y^2 - 4, \qquad y(0) = 2/3$

Hinweis: Für die Integation in y verwende man Partialbruchzerlegung.

(iii) $y' - 3xy + 2y = 0, \qquad y(0) = 1$

Übung 19

Ein kugelförmiger Wassertropfen fällt durch wasserhaltige Luft (eine Wolke) und nimmt dabei Wasser auf. Man nehme an, dass die Menge des pro Zeiteinheit aufgenommenen Wassers proportional ist zur Oberfläche des Tropfens. Man finde und löse die Differentialgleichung für den Radius r in Abhängigkeit der Zeit t.

Übung 20

Für einen adiabatischen Vorgang mit einem idealen Gas (Volumen V, Druck p) gilt

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{c_p}{c_V}\frac{p}{V},$$

wobei c_P und c_V zwei Konstanten sind (spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck und spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen).

(i) Man bestimme den Druck p als Funktion des Volumens V.

(ii) Man zeige dass $pV^\kappa =$ konst. für eine geeignete Konstante κ und bestimme diese.

Übung 21

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$xy' = y + x.$$

(i) Ist diese Gleichung linear? Ist diese Gleichung separierbar? Man begründe die Antwort.

(ii) Man bestimme die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

(iii) Man bestimme die partikuläre Lösung dieser Gleichung zur Anfangsbedingung $y(1) = 2$.

Übung 22

Man finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Man gebe die Lösungen jeweils in der Form $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ an ($y_h(x)$: Lösung der homogenen Gleichung, $y_p(x)$: Lösung der inhomogenen Gleichung). (Hinweis: Die auftretenden Integrale der Form $\int xe^x dx$ bestimme man mit partieller Integration: $\int fg' = fg - \int f'g$)

(i) $y' - y = e^{2x}$
(ii) $y' + (x-1)y = 0$
(iii) $xy' + y = \sin(x)$
(iv) $y' + y = x$
(v) $xy' - (x+1)y - x^2 + x^3 = 0$
(vi) $y' + 2y = 3$

Übung 23

Man löse die folgenden Anfangswertprobleme.

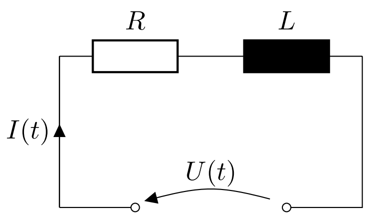
(i) $y' - y = e^x$, $y(1) = 0$.
(ii) $xy' + y + xe^x = 0$, $y(1) = 0$.

Übung 24

In einem R-L-Stromkreis mit Ohmschem Widerstand R und Induktivität L genügt die Stromstärke $I(t)$ der Differentialgleichung

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U.$$

Hier ist $U = U(t)$ die angelegte Spannung.



(i) Man bestimme die Stromstärke $I(t)$ bei konstanter Spannung $U(t) = \text{konst.} = U_0$ und $I(0) = 0$.
(ii) Man bestimme die Stromstärke $I(t)$ bei linear mit der Zeit ansteigender Spannung $U(t) = at$ $(a > 0)$ und $I(0) = 0$.
(iii) Man skizziere die Stromverläufe aus (i) und (ii) und bestimme das asymptotische Verhalten für grosse Zeiten.

Übung 25

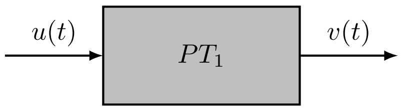
Ein PT_1-Regelkreisglied lässt sich durch die lineare Differentialgleichung

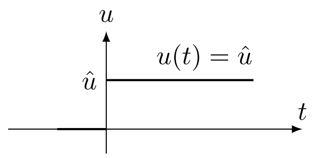
$$T\dot{v} + v = Ku$$

beschreiben. Hier ist $u = u(t)$ das Eingangssignal, $v = v(t)$ das Ausgangssignal und T, K sind Konstanten. Der schematische Aufbau ist untenstehend dargestellt. Man bestimme den zeitlichen Verlauf des Ausgangssignals $v(t)$ für $t \geq 0$, wenn das Eingangssignal eine sogenannte *Sprungfunktion* ist:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \hat{u} & t \geq 0. \end{cases}$$

Zu Beginn ($t = 0$) gilt $v(0) = 0$. Schematisch:





Übung 26

Man löse die folgenden Anfangswertprobleme:

(i) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = \pi$, $y'(0) = 0$.
(ii) $y'' - 20y' + 64y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
(iii) $4\ddot{x} - 4\dot{x} + x = 0$, $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = -1$.

Übung 27

Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 4y = e^{-3x}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Übung 28

Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 4y = 17, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 2.$$

Übung 29

Man finde die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y'' - 4y = 3e^{2x}.$$

Übung 30

Die Differentialgleichung welche das System Feder-Masse-Reibung-Anregung beschreibt lautet

$$y'' + 2\Delta y' + \omega_0^2 y = F_0 \cos(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung davon ist

$$y(t) = C \cos(\omega t + \phi),$$

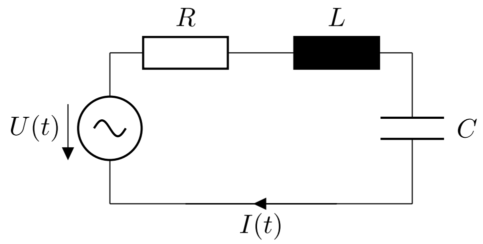
wobei C von ω wie folgt abhängt:

$$C(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + 4\Delta^2\omega^2}}.$$

Man finde den Wert von ω bei welchem $C(\omega)$ maximal wird und bestimme den maximalen Wert von C.

Übung 31

Wir betrachten den folgenden elektrischen R-L-C-Kreis:



Die Spannungsabfälle an den Elementen sind

$$\text{Widerstand:}\quad U_R = RI, \qquad \text{Kondensator:}\quad U_C = \frac{Q}{C}, \qquad \text{Spule:}\quad U_L = L\frac{dI}{dt}.$$

Die Spannungsquelle liefert die Spannung $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$.

(i) Unter Verwendung von $I = \frac{dQ}{dt}$ finde man die Differentialgleichung für die Funktion $I(t)$, welche dieses System beschreibt.

(ii) Man finde eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

(iii) Man schreibe die Lösung aus (ii) in der Form

$$I_i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

und zeige dass in diesem Ausdruck I_0 folgendermassen von ω abhängt:

$$I_0(\omega) = \frac{U_0\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}},$$

wobei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ die Eigenfrequenz des Systems ist.

(iv) Man finde den Wert von ω bei welchem das Maximum von $I_0(\omega)$ (Resonanzfrequenz). Man vergleiche die Situation mit dem mechanischen System (siehe Vorlesung).

Übung 32

Man finde die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y'' + 2y = x^2.$$

Übung 33

Man finde eine Lösung von

$$y'' - 4y' - 12y = \sin(2x).$$

Übung 34

Man bestimme eine Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen:

(i) $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$,

(ii) $y'' + 4y = 8x^2$,

(iii) $y'' - y' - 2y = 10\cos(x)$.

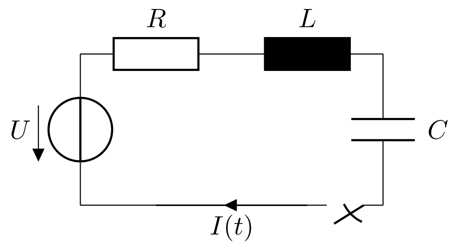
Übung 35

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

(i) $y'' + 2y' - 8y = e^{3x}$,
(ii) $y'' - 10y' + 41y = \sin(x)$.

Übung 36

Wir betrachten einen elektrischen Schaltkreis bestehend aus einer Spule mit $L = 1$, einem Widerstand $R = 100$, einem Kondensator $C = 10^{-4}$ und einer Spannungsquelle mit $U = 1000$ (Gleichstrom). Alle Angaben in SI-Einheiten.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich keine Ladung auf dem Kondensator. Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter geschlossen.

(i) Man bestimme $I(t)$.
(ii) Man bestimme die Ladung welche sich nach langer Zeit auf dem Kondensator befindet, i.e. man bestimme $\lim_{t\to\infty} Q(t)$, wobei $Q(t)$ die Ladung auf dem Kondensator ist.

Übung 37

Man schreibe die folgenden Differentialgleichungen als System von Differentialgleichungen erster Ordnung und gebe die Matrix A der dazugehörigen Matrixschreibweise $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ sowie den Vektor $\overrightarrow{y}(3)$, resp. $\overrightarrow{y}(0)$ an.

(i)

$$2y'' - 5y' + y = 0, \qquad y(3) = 6, \quad y'(3) = -1.$$

(ii)

$$y^{(4)} + 3y'' - 17y' = -8y, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3, \quad y'''(0) = 4.$$

Übung 38

Für die folgenden Gleichungssystem finde man die Lösung zu den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 2$ und klassifiziere den Ursprung (y_1, y_2) (dies ist der Fixpunkt) als Attraktor, Repeller oder Sattelpunkt.

(i)

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = -y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 - 5y_2 \\ y_2' = y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

(iii)

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 - y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

(iv)

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

Übung 39

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man finde die allgemeine Lösung von $\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}$ und bestimme die möglichen Werte von α und β so dass das Anfangswertproblem

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \qquad \overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

eine Lösung besitzt, welche sich für $x \to \infty$ dem Ursprung annähert.

Übung 40

Man löse das Anfangswertproblem

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \quad \overrightarrow{y}(x_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

wobei $A = \alpha\mathbb{1}$.

Übung 41

Man löse das Anfangswertproblem

$$\overrightarrow{y}' = A\overrightarrow{y}, \quad \overrightarrow{y}(x_0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

3. Lösungen zu den Übungen

Lösung zu Übung 1

(i) 1, (ii) 1, (iii) 2, (iv) 1, (v) 3, (vi) 2

Lösung zu Übung 2

(i) $y' = G(x,y) = \frac{x}{y}$
(ii) $y' = G(x,y) = \frac{x+y}{x^2}$
(iii) $y' = G(x,y) = x - y$
(iv) $y' = G(x,y) = 1 - \frac{y}{x}$
(v) $y'' = G(x,y,y') = y'$
(vi) $y' = G(x,y) = -y^2 + \frac{y}{x}$
(vii) $y' = G(x,y) = -(1/x+17)/(1/y+1)$

Lösung zu Übung 3

Durch einsetzen.

Lösung zu Übung 4

Durch einsetzen.

Lösung zu Übung 5

$y(x) = \log(x) + C$

Lösung zu Übung 6

Durch einsetzen.

Lösung zu Übung 7

Alle gegebenen Funktionen sind Lösungen der Gleichung.

Lösung zu Übung 8

Die zu untersuchende Lösung ist $y(x) = xe^{-x}$. Wir haben somit $y'(x) = (1-x)e^{-x}$, $y''(x) = (x-2)e^{-x}$. Eingesetzt in die linke Seite der Gleichung $y'' + 2y' + y = 0$ ergibt

$$y'' + 2y' + y = (1-x)e^{-x} + 2(x-2)e^{-x} + xe^{-x} = 0,$$

was der rechten Seite entspricht. Somit ist die Gleichung erfüllt, i.e. $y(x) = xe^{-x}$ ist eine Lösung dieser Gleichung.

Lösung zu Übung 9

(i) Man überprüft durch einsetzen dass die gegebenen Funktionen Lösungen sind.
(ii) Jede Funktion der Form

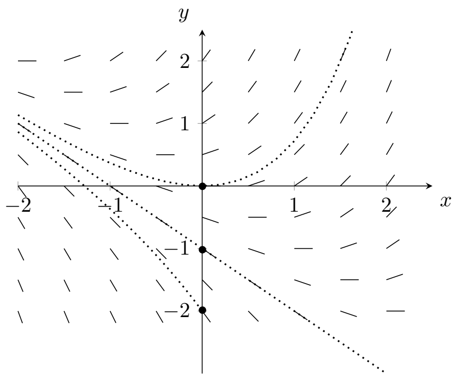
$$y(x) = C_1 x^{-3/2} + C_2 x^{-1/2}$$

mit C_1, C_2 zwei Konstanten ist eine Lösung.
(iii) Die Lösung lautet

$$y(x) = x^{-3/2}.$$

Lösung zu Übung 10

(i) Wir setzen $m = x + y =$ konst. und finden dass die Kurven konstanter Steigung (dies sind die Isoklinen) Geraden mit Steigung -1 entsprechen. Beispielsweise besitzt das Richtungsfeld die Steigung $m = 0$ auf der Geraden $y = -x$ und Steigung $m = -1$ auf der Geraden $y = -x - 1$.

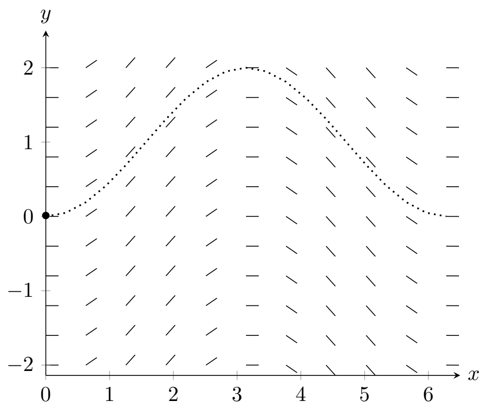


(ii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet, die Anfangsbedingungen sind durch die fetten Punkte gegeben.

(iii) Für $y(0) > -1$ haben wir $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ und für $y(0) \leq -1$ haben wir $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$.

Lösung zu Übung 11

(i)



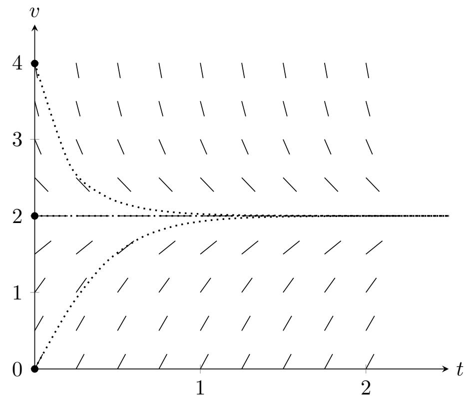
(ii) Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = -\cos(x) + C$.

(iii) Die partikuläre Lösung lautet $y(x) = -\cos(x) + 1$. Sie ist im Richtungsfeld gepunktet eingezeichnet.

Lösung zu Übung 12

(i) Das Newtonsche Gesetz ist $F = ma$, wobei $a = dv/dt$. Die resultierende Kraft ist die Differenz zwischen Gewichtskraft und Strömungswiderstandskraft: $F = mg - 10v^2$. Mit $m = 10$ ergibt sich die gesuchte Gleichung.

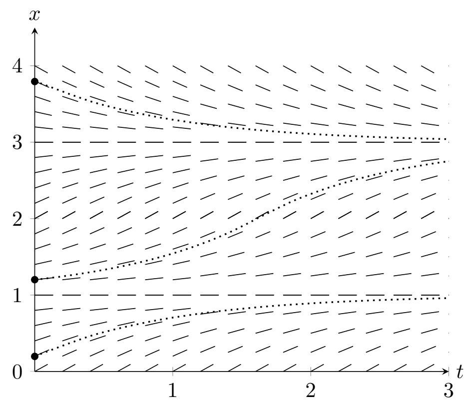
(ii)



(iii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet. Die Anfangsbedingungen sind durch die fetten Punkte gegeben. Unabhängig von der Anfangsbedingung ergibt sich für grosse Zeiten ($\lim_{t\to\infty}$) die Geschwindigkeit $v = 2$.

Lösung zu Übung 13

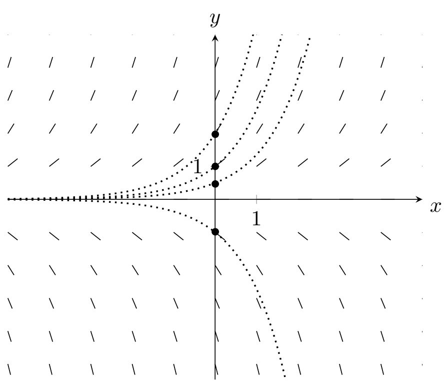
(i)



(ii) Gepunktet eingezeichnet.
(iii) Für $x_0 = 0.2$ gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$, für $x_0 = 1.2, 3.8$ gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 3$.

Lösung zu Übung 14

(i)



(ii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet.
(iii) Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = Ce^x$.

Lösung zu Übung 15

$$y(x) = \frac{-4}{2x^2 + x^4 + C}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Lösung zu Übung 16

Diese Gleichung lässt sich nicht mit der Methode der Separation der Variablen lösen (die Variablen lassen sich nicht separieren).

Lösung zu Übung 17

(i) $y(x) = \frac{x}{Cx+1}$
(ii) $y(x) = C\sqrt{1+x^2}$
(iii) $y(x) = \arccos\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$
(iv) $y(x) = \frac{(x+C)^2}{4}$

Lösung zu Übung 18

(i) Allgemeine Lösung: $y(x) = \frac{x}{Cx-1}$, Anfangsbedingungen werden von allen Lösungen erfüllt.
(ii) Allgemeine Lösung: $y(x) = \frac{2}{3}\frac{(1+Ce^{12x})}{(1-Ce^{12x})}$. Partikuäre Lösung: $y(x) = \frac{2}{3}$.
(iii) Allgemeine Lösung: $y(x) = Ce^{3x^2/2-2x}$. Partikuäre Lösung: $y(x) = e^{3x^2/2-2x}$.

Lösung zu Übung 19

Für die Oberfläche und das Volumen einer Kugel gelten

$$O = 4\pi r^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Aus der Beschreibung des Vorgangs haben wir

$$\frac{dV}{dt} = kO,$$

wobei k eine Konstante ist. Wegen

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

gilt

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = k4\pi r^2.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$\frac{dr}{dt} = k.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung. Ihre Lösung lautet

$$r(t) = kt + r(0).$$

Lösung zu Übung 20

Separation und Integration liefert

$$\log(p) = -\frac{c_p}{c_V}\log(V) + C.$$

Somit folgt

$$p(V) = CV^{-c_p/c_V}$$

und daraus

$$pV^{c_p/c_V} = C.$$

Wir haben $\kappa = c_p/c_V$.

Lösung zu Übung 21

(i) Die Gleichung ist linear:

$$y' = \frac{y}{x} + 1,$$

i.e. $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1$. Die Gleichung ist nicht separierbar, die Variablen lassen sich nicht trennen.

(ii) Die dazugehörige homogene Gleichung lautet

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Separation der Variablen liefert

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y_h(x) = Cx.$$

Variation der Konstanten ergibt den Ansatz $y_p(x) = \varphi(x)x$. Einsetzen in der inhomogenen Gleichung ergibt

$$\varphi'(x)x + \varphi(x) = \varphi(x) + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{x}.$$

Daraus folgt $\varphi(x) = \log(x) + C$. Die Konstante setzen wir gleich Null (wir benötigen nur eine partikuläre Lösung) und haben somit

$$y_p(x) = x\log(x).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Cx + x\log(x).$$

(iii) Einsetzen der Anfangsbedingung $y(1) = 2$ in die allgemeine Lösung ergibt $C = 2$. Somit lautet die partikuläre Lösung zur Anfangsbedingung $y(1) = 2$

$$y(x) = 2x + x\log(x).$$

Lösung zu Übung 22

(i) $y_h(x) = Ce^x$, $y_p(x) = e^{2x}$. Somit $y(x) = Ce^x + e^{2x}$.

(ii) $y_h(x) = Ce^{x-\frac{x^2}{2}}$, $y_p(x) = 0$ (die Gleichung ist homogen).

(iii) $y_h(x) = \frac{C}{x}$, $y_p(x) = -\frac{\cos(x)}{x}$. Somit $y(x) = \frac{C-\cos(x)}{x}$.

(iv) $y_h(x) = Ce^{-x}$, $y_p(x) = x - 1$. Somit $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$.

(v) $y_h(x) = Cxe^x$, $y_p(x) = x^2$. Somit $y(x) = Cxe^x + x^2$.

(vi) $y_h(x) = Ce^{-2x}$, $y_p(x) = \frac{3}{2}$. Somit $y(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$.

Lösung zu Übung 23

(i) $y(x) = (x-1)e^x$ (ii) $y(x) = \frac{1-x}{x}e^x$

Lösung zu Übung 24

Die Gleichung ist erster Ordnung und inhomogen. Lösung der homogenen Gleichung: $I_h(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}$.

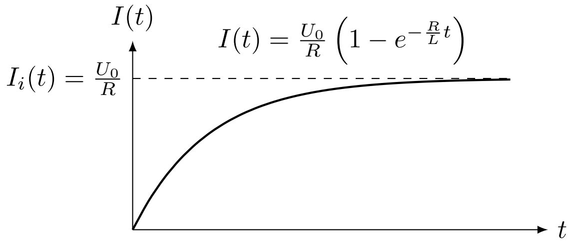
(i) Variation der Konstanten liefert $I_i(t) = \frac{U_0}{R}$. Somit ist die allgemeine Lösung $I(t) = I_h(t) + I_i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R}$. Die Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt die partikuläre Lösung

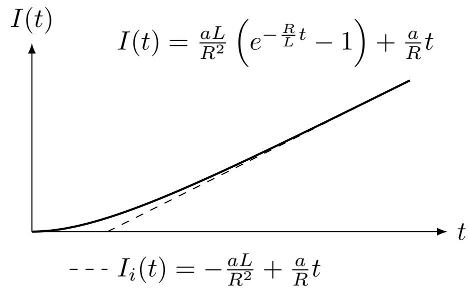
$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

(ii) Variation der Konstanten liefert $I_i(t) = -\frac{aL}{R^2} + \frac{a}{R}t$. Somit ist die allgemeine Lösung $I(t) = I_h(t) + I_i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} - \frac{aL}{R^2} + \frac{a}{R}t$ und die Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt die partikuläre Lösung

$$I(t) = \frac{aL}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1\right) + \frac{a}{R}t.$$

(iii)





Das asymptotische Verhalten ist bei (i) $I_i(t) = \frac{U_0}{R}$ und bei (ii) $I_i(t) = -\frac{aL}{R^2} + \frac{a}{R}t$, entsprechend der Lösung der inhomogenen Gleichung $I_i(t)$, welche für das Verhalten für grosse Zeiten massgebend ist.

Lösung zu Übung 25

Es handelt sich um eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösung der homogenen Gleichung ist $v_h(t) = Ce^{-\frac{t}{T}}$. Das Eingangssignal der Sprungfunktion entspricht $u(t) = \hat{u}$ für den uns interessierenden Zeitbereich $t \geq 0$. Variation der

Konstanten ergibt die Lösung der inhomogenen Gleichung $v_i(t) = K\hat{u}$. Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$v(t) = Ce^{-\frac{t}{T}} + K\hat{u}.$$

Die Anfangsbedingung $v(0) = 0$ ergibt die partikuläre Lösung

$$v_p(t) = K\hat{u}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right),$$

welche das Ausgangssignal für $t \geq 0$ beschreibt.

Lösung zu Übung 26

(i) $\lambda_\pm = -2 \pm j$. Allgemeine Lösung: $y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$, partikuläre Lösung: $y_p(x) = \pi e^{-2x}(\cos(x) + 2\sin(x))$.

(ii) $\lambda_\pm = 10 \pm 6$. Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{16x}$, partikuläre Lösung: $y_p(x) = \frac{1}{6}(-e^{4x} + e^{16x})$.

(iii) $\lambda_\pm = \frac{1}{2}$. Allgemeine Lösung: $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\frac{1}{2}t}$, partikuläre Lösung: $x_p(t) = (5 - \frac{7}{2}t)e^{\frac{1}{2}t}$.

Lösung zu Übung 27

Die dazugehörige homogene Gleichung ist $y'' + 4y = 0$. Das charakteristische Polynom dazu ist $\lambda^2 + 4 = 0$ mit Lösungen $\lambda_\pm = \pm 2j$. Somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y_i(x) = Ae^{-3x}.$$

Einsetzen ergibt $A = \frac{1}{13}$, i.e. wir haben die Lösung $y_i(x) = \frac{1}{13}e^{-3x}$ der inhomogenen Gleichung gefunden. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{13}e^{-3x}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt $C_1 = -\frac{1}{13}$, $C_2 = \frac{3}{26}$, i.e. die partikuläre Lösung zu den gegebenen Anfangsbedingungen lautet

$$y_p(x) = -\frac{1}{13}\cos(2x) + \frac{3}{26}\sin(2x) + \frac{1}{13}e^{-3x}.$$

Lösung zu Übung 28

Wir haben

$$y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y_i(x) = A$. Einsetzen ergibt $A = \frac{17}{4}$, i.e. $y_i(x) = \frac{17}{4}$. Zusammen mit den Anfangsbedingungen folgt

$$y_p(x) = -\frac{17}{4}\cos(2x) + \sin(2x) + \frac{17}{4}.$$

Lösung zu Übung 29

Charakteristisches Polynom ist $\lambda^2 - 4 = 0$ mit Lösung $\lambda = \pm 2$. Somit haben wir $y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung: $y_i(x) = Ae^{2x}$. Beim Einsetzen verschwindet die linke Seite der Differentialgleichung jedoch, i.e. dieser Ansatz ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Neuer Ansatz (Multiplikation mit x): $y_i(x) = Axe^{2x}$. Einsetzen ergibt $A = \frac{3}{4}$, i.e. $y_i(x) = \frac{3}{4}xe^{2x}$ und somit ist

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{4}xe^{2x}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Lösung zu Übung 30

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = (\omega_0^2 - z)^2 + 4z\Delta^2,$$

deren Quadratwurzel (mit $z = \omega^2$) im Nenner von $C(\omega)$ auftritt. $C(\omega)$ wird maximal an der Stelle an welcher $f(z)$ minimal ist.

$$\frac{df}{dz} = -2(\omega_0^2 - z) + 4\Delta^2.$$

Diesen Ausdruck Null gesetzt ergibt

$$z = \omega_0^2 - 2\Delta^2, \qquad \text{i.e.} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Delta^2}.$$

Im folgenden verwenden wir für diesen Wert von ω die Bezeichung $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Delta^2}$ (Index R für Resonanzfrequenz). Wir haben

$$f(\omega_R) = 4\Delta^2(\omega_0^2 - \Delta^2)$$

und somit ist der maximale von $C(\omega)$

$$C(\omega_R) = \frac{F_0}{2\Delta\sqrt{\omega_0^2 - \Delta^2}}.$$

Lösung zu Übung 31

(i) Die Summe der Spannungen in der Masche muss verschwinden, somit haben wir

$$U_R + U_C + U_L = U(t),$$

i.e.

$$RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = U_0 \sin(\omega t).$$

Ableiten nach der Zeit ergibt die folgende lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = U_0\omega\cos(\omega t).$$

(ii) Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$I_i(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Ableiten ergibt

$$I_i'(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t), \qquad I_i''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t).$$

Einsetzen in der Differentialgleichung und ordnen der linken Seite nach Sinus- und Kosinustermen ergibt

$$\left(\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) A + \omega RB\right) \cos(\omega t) + \left(\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) B - \omega RA\right) \sin(\omega t) = U_0\omega \cos(\omega t).$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) A + \omega RB = U_0\omega,$$
$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) B - \omega RA = 0.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Konstanten A, B. Auflösen ergibt

$$A = \frac{U_0\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)}{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}, \qquad B = \frac{U_0 R}{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}.$$

Damit haben wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung gefunden:

$$I_i(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

wobei die Konstanten A und B durch die obigen Ausdrücke gegeben sind.

(iii) Für $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = I_0\cos(\omega t + \varphi)$ muss gelten $I_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$ (aus Additionstheoremen). Mit den obigen Ausdrücken für A und B folgt

$$I_0(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}} = \frac{U_0\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}}.$$

(iv) Das Maximum liegt bei $\omega = \omega_0$, i.e. die Resonanzfrequenz liegt bei der Eigenfrequenz ω_0 des Systems. Dies ist anders als beim mechanischen System, bei welchem die Resonanzfrequenz bei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Delta^2}$ liegt (wobei $\Delta = \delta/m$ und wir mit δ den Reibungskoeffizienten und mit m die Masse bezeichnen).

Lösung zu Übung 32

$$y(x) = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) + \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Lösung zu Übung 33

$$y_i(x) = \frac{1}{40}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x).$$

Lösung zu Übung 34

(i) $y(x) = \frac{2}{3}e^{-2x}$,
(ii) $y(x) = 2x^2 - 1$,
(iii) $y(x) = -3\cos(x) - \sin(x)$.

Lösung zu Übung 35

(i) $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{7}e^{3x}$,
(ii) $y(x) = e^{5x}(C_1\cos(4x) + C_2\sin(4x)) + \frac{1}{170}(\cos(x) + 4\sin(x))$.

Lösung zu Übung 36

Die Summe der Spannungen in der Masche muss verschwinden, somit haben wir

$$LI' + RI + \frac{1}{C}Q = U.$$

Ableiten liefert

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = 0.$$

Die Anfangsbedingungen lauten $I(0) = 0$, $I'(0) = \frac{U}{L}$. Die Lösung dieses Anfangswertproblems ist

$$I(t) = \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-50t}\sin(50\sqrt{3}t).$$

Wegen $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} I'(t) = 0$ folgt aus der ersten Gleichung die Beziehung $\lim_{t\to\infty} Q(t) = CU = \frac{1}{10}$.

Lösung zu Übung 37

(i)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\dfrac{1}{2}y_1 + \dfrac{5}{2}y_2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y}(3) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -8y_1 + 17y_2 - 3y_3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 17 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Übung 38

(i) $\overrightarrow{y}(x) = \frac{9}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x}$, Sattelpunkt.

(ii) $\overrightarrow{y}(x) = \frac{13}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$, Sattelpunkt.

(iii) $\overrightarrow{y}(x) = -\frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4x} + \frac{7}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x}$, Repeller.

(iv) $\overrightarrow{y}(x) = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2x} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$, Attraktor.

Lösung zu Übung 39

Die allgemeine Lösung lautet

$$\overrightarrow{y}(x) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4x}.$$

Die partikuläre Lösung wird sich für $x \to \infty$ dem Ursprung annähern, falls $C_1 = 0$. Dies wird erreicht durch $\alpha = -\beta$.

Lösung zu Übung 40

$$\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{\alpha(x-x_0)}.$$

Lösung zu Übung 41

$$\overrightarrow{y}(x) = \begin{pmatrix} ae^{\alpha(x-x_0)} \\ be^{\beta(x-x_0)} \\ ce^{\gamma(x-x_0)} \end{pmatrix}.$$