MATHEMATIK 1
VERSION 24. September 2021

LISIBACH ANDRÉ

Das Gewicht der Vorlesung liegt auf konkreten Rechnungen und weniger auf abstrakten Formulierungen. Deshalb befinden sich im Skript viele Rechenbeispiele und weitere werden im Unterricht besprochen. Wir benutzen Kursivschrift für Begriffsdefinitionen.

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

In den Analysisvorlesungen wurden (meist) gegebene Funktionen auf ihre Eigenschaften hin untersucht (analysiert). Beim Studium von Differentialgleichungen werden Gesetzmässigkeiten aus Physik, Ökonomie, Biologie usw. mathematisch formuliert und dazu Lösungen gesucht. Die Formulierungen sind in der Form von Differentialgleichungen, die Lösungen davon sind Funktionen welche die interessierenden Grössen, meist in Abhängigkeit der Zeit, beschreiben.

1.1. **Einführende Beispiele.** Ohne die auftretenden Begriffe im Detail zu erklären (siehe nachfolgenden Teilabschnitt), werden einfache Beispiele und Anwendungen betrachtet.

1.1.1. *Kinematik.* Wir betrachten eine eindimensionale Bewegung mit konstanter Beschleunigung und interessieren uns für die Position in Abhängigkeit der Zeit. Die Voraussetzung konstanter Beschleunigung ist beispielsweise beim freien Fall in Erdnähe gegeben. Die Gesetzmässigkeit welche das kinematische Problem beschreibt ist

$$\frac{d^2s}{dt^2}(t) = a,$$

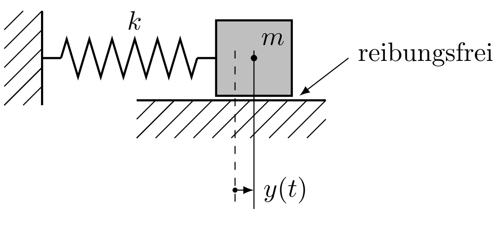
wobei wir mit $s(t)$ die Position in Abhängigkeit der Zeit t und mit a die konstante Beschleunigung bezeichnen. Daraus folgt durch zweifache unbestimmte Integration

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2,$$

wobei C_1, C_2 Integrationskonstanten sind. Mit den Anfangsbedingungen $s(0) = s_0$ (Position zum Zeitpunkt $t = 0$) und $v(0) = v_0$ (Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$) folgt

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0.$$

1.1.2. *Dynamik.* Wir betrachten das mechanische System:



Wir bezeichnen mit m die Masse, mit k die Federkonstante und mit $y(t)$ die Auslenkung des Körpers aus der Ruhelage. Der Körper werde aus der Ruhelage ausgelenkt und zum

Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Wir interessieren uns für die Auslenkung aus der Ruhelage in Abhängigkeit der Zeit. Die Gesetzmässigkeit welche dieses Problem beschreibt ist das Bewegungsgesetz von Newton, i.e. $F = ma$, wobei wir mit F die Kraft auf den Körper und mit a dessen Beschleunigung bezeichnen. Mit

$$F(t) = -ky(t), \qquad a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t).$$

folgt

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) = -Ky(t), \qquad \text{wobei} \qquad K = \frac{k}{m}.$$

Mögliche Lösungen dieser Gleichung sind

$$\begin{aligned} y(t) &= C\sin(\sqrt{K}t) \\ y(t) &= C\cos(\sqrt{K}t) \\ y(t) &= C_1\cos(\sqrt{K}t) + C_2\sin(\sqrt{K}t), \end{aligned}$$

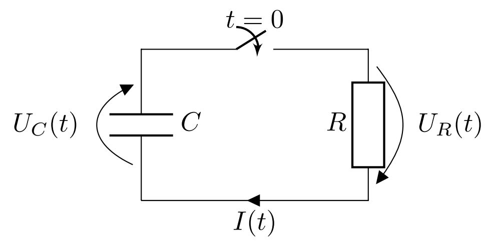
wobei C, C_1, C_2 Konstanten sind. Diese möglichen Lösungen beschreiben harmonische Schwingungen. Die letzte davon, zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0, \qquad v(0) = \frac{dy}{dt}(0) = v_0$$

ergibt

$$y(0) = y_0\cos(\sqrt{K}t) + \frac{v_0}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}t).$$

1.1.3. *Elektrotechnik.* Wir betrachten die Schaltung:



Auf dem Kondensator befinde sich eine Ladung Q_0. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Wir interessieren uns für die Ladung Q auf dem Kondensator in Abhängigkeit der Zeit t. Die Gesetzmässigkeit zur Beschreibung der Situation ist die Kirchhoffsche Maschenregel:

$$U_C(t) + U_R(t) = 0.$$

Zusätzlich haben wir die Gesetze

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}, \qquad U_R(t) = RI(t).$$

Eingesetzt in obige Gleichung, zusammen mit $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$, erhalten wir

$$\frac{dQ}{dt}(t) = -\frac{1}{RC}Q(t).$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t},$$

welche auch die Anfangsbedingung $Q(0) = Q_0$ erfüllt.

2. Aufgaben zu gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 1

Man bestimme die Ordnung der folgenden Differentialgleichungen für $y(x)$.

(i) $y' = x$

(ii) $y' + y = x$

(iii) $y'' = y$

(iv) $y' = y^2$

(v) $y''' + 2y' = e^{-x}$

(vi) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = x$

Aufgabe 2

Man schreibe die folgenden Gleichungen in Form einer expliziten Differentialgleichung, i.e. in der Form

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

und gebe die Funktion G an.

(i) $yy' = x$

(ii) $x^2y' = y + x$

(iii) $y' + y = x$

(iv) $\frac{d}{dx}(xy) = x$

(v) $y'' - y' = 0$

(vi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = x$

(vii) $\frac{d}{dx}(\log(xy) + y + 17x) = 0$

Aufgabe 3

Man prüfe dass $y(x) = 1/(1-x)$ eine Lösung der Gleichung $y' = y^2$ ist.

Aufgabe 4

Man prüfe dass $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ eine Lösung der Gleichung $yy' + x = 0$ ist.

Aufgabe 5

Man gebe die allgemeine Lösung der Gleichung $xy' = 1$ an.

Aufgabe 6

Man zeige dass die Funktion $y(x) = \arctan(x)$ eine Lösung der Gleichung $(x^2+1)y' = 1$ ist.

Aufgabe 7

Welche der folgenden Funktionen sind Lösungen der Gleichung $y'' = 9y$?

(i) e^{3x}, (ii) e^{-3x}, (iii) $\sinh(3x)$, (iv) $\cosh(3x)$.

Hinweis:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Aufgabe 8

Man zeige dass $y(x) = xe^{-x}$ eine partikuläre Lösung der Gleichung $y'' + 2y' + y = 0$ ist.

Aufgabe 9

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^3 y'(x) \left(y''(x)\right)^2 = x + y(x).$$

(i) Man bestimme die Ordnung dieser Differentialgleichung.

(ii) Man zeige dass $y(x) = x \log(x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 10

Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = -17y^2.$$

Man zeige dass im Allgemeinen $y_1(x) + y_2(x)$ keine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Aufgabe 11

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$4x^2 y'' + 12xy' + 3y = 0.$$

(i) Man zeige dass die folgenden Funktionen Lösungen dieser Differentialgleichungen sind (für $x > 0$):

$$y_0(x) = x^{-3/2}, \quad y_1(x) = x^{-1/2}, \quad y_2(x) = -9x^{-3/2}, \quad y_3(x) = 7x^{-1/2},$$
$$y_4(x) = -9x^{-3/2} + 7x^{-1/2}.$$

(ii) In Anbetracht dieser Lösungen finde man weitere Lösungen.

(iii) Man bestimme die eindeutige Lösung unter den Bedingungen

$$y(4) = 1/8, \qquad y'(4) = -3/64.$$

Aufgabe 12

Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = x + y.$$

(i) Man skizziere das Richtungsfeld im Bereich $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.

(ii) Man skizziere die Lösungskurve zu den Anfangsbedingungen $y(0) = -2, -1, 0$ im betrachteten Gebiet.

(iii) Man bestimme das Langzeitverhalten von Lösungen für $x \to \infty$ in Abhängigkeit von Anfangsbedingungen $y(0)$.

Aufgabe 13

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$y' = \sin(x).$$

(i) Man skizziere das Richtungsfeld im Gebiet $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [-2, 2]$.

(ii) Man bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung.

(iii) Man bestimme die partikuläre Lösung zu der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und skizziere diese im Richtungsfeld.

Aufgabe 14

Wir betrachten den freien Fall einer Masse $m = 10$ mit Anfangsgeschwindigkeit unter Einfluss des turbulenten Strömungswiderstandes in der Nähe der Marsoberfläche und interessieren uns für die Geschwindigkeit $v(t)$ dieser Masse. Der Strömungswiderstand ist proportional zu $v(t)^2$ und der Proportionalitätsfaktor sei -10 (negativ da entgegengesetzt zur Geschwindigkeitsrichtung). Für die Beschleunigung durch Gravitation setze man $g = 4$ (alle Angaben in SI-Einheiten).

(i) Man benutze das Newtonsche Gesetz und zeige dass die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = 4 - v^2$$

die Geschwindigkeit $v(t)$ beschreibt.

(ii) Man zeichne für diese Differentialgleichung (qualitativ) das Richtungsfeld im Bereich $(t, v) \in [0, 2] \times [0, 4]$.

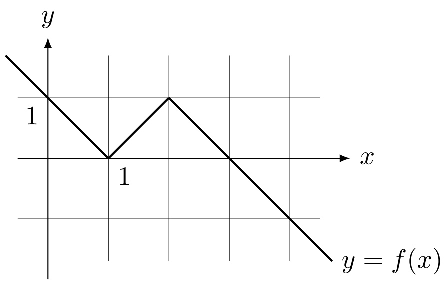
(iii) Für die Anfangsbedingungen $v(0) = 0$, $v(0) = 2$ und $v(0) = 4$ zeichne man qualitativ die Lösungen ein und bestimme das Langzeitverhalten.

Aufgabe 15

Man betrachte die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

wobei die Funktion $f(x)$ durch den folgenden Graphen gegeben ist:



(i) Man skizziere das Richtungsfeld für den Bereich $(t, x) \in [0, 3] \times [0, 4]$.

(ii) Man skizziere die drei Lösungskurven zu den Anfangswerten $x_0 = 0.2, 1.2, 3.8$.

(iii) Man bestimme den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$ für die gegebenen Anfangswerte.

3. Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

(i) 1, (ii) 1, (iii) 2, (iv) 1, (v) 3, (vi) 2

Lösung zu Aufgabe 2

(i) $y' = G(x,y) = \frac{x}{y}$
(ii) $y' = G(x,y) = \frac{x+y}{x^2}$
(iii) $y' = G(x,y) = x - y$
(iv) $y' = G(x,y) = 1 - \frac{y}{x}$
(v) $y'' = G(x,y,y') = y'$
(vi) $y' = G(x,y) = -y^2 + \frac{y}{x}$
(vii) $y' = G(x,y) = -(1/x+17)/(1/y+1)$

Lösung zu Aufgabe 3

Durch einsetzen.

Lösung zu Aufgabe 4

Durch einsetzen.

Lösung zu Aufgabe 5

$y(x) = \log(x) + C$

Lösung zu Aufgabe 6

Durch einsetzen.

Lösung zu Aufgabe 7

Alle gegebenen Funktionen sind Lösungen der Gleichung.

Lösung zu Aufgabe 8

Die zu untersuchende Lösung ist $y(x) = xe^{-x}$. Wir haben somit $y'(x) = (1-x)e^{-x}$, $y''(x) = (x-2)e^{-x}$. Eingesetzt in die linke Seite der Gleichung $y'' + 2y' + y = 0$ ergibt

$$y'' + 2y' + y = (1-x)e^{-x} + 2(x-2)e^{-x} + xe^{-x} = 0,$$

was der rechten Seite entspricht. Somit ist die Gleichung erfüllt, i.e. $y(x) = xe^{-x}$ ist eine Lösung dieser Gleichung.

Lösung zu Aufgabe 9

(i) Die Differentialgleichung ist zweiter Ordnung.
(ii) Wir haben $y'(x) = \log(x) + 1$, $y''(x) = \frac{1}{x}$. Eingesetzt in der linken Seite der Gleichung ergibt

$$x^3(\log(x)+1)\left(\frac{1}{x}\right)^2 = x(\log(x)+1) = x\log(x) + x.$$

Dies entspricht der rechten Seite der Differentialgleichung, somit ist $y(x)$ eine Lösung.

Lösung zu Aufgabe 10

Eingesetzt in der linken Seite der Gleichung ergibt

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = -17y_1^2 - 17y_2^2,$$

wobei wir für die zweite Zeile verwendet haben dass y_1, y_2 Lösungen der Differentialgleichung sind. Eingesetzt in der rechten Seite der Gleichung ergibt

$$-17(y_1 + y_2)^2 = -17(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2).$$

Dies stimmt im Allgemeinen nicht mit der linke Seite überein, da im Allgemeinen der Mischterm $2y_1y_2$ nicht verschwindet.

Lösung zu Aufgabe 11

(i) Man überprüft durch einsetzen dass die gegebenen Funktionen Lösungen sind.

(ii) Jede Funktion der Form

$$y(x) = C_1x^{-3/2} + C_2x^{-1/2}$$

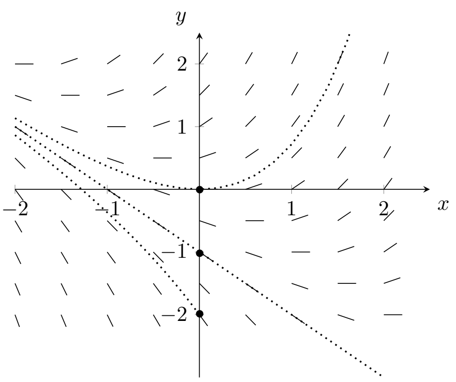
mit C_1, C_2 zwei Konstanten ist eine Lösung.

(iii) Die Lösung lautet

$$y(x) = x^{-3/2}.$$

Lösung zu Aufgabe 12

(i) Wir setzen $m = x + y =$ konst. und finden dass die Kurven konstanter Steigung (dies sind die Isoklinen) Geraden mit Steigung -1 entsprechen. Beispielsweise besitzt das Richtungsfeld die Steigung $m = 0$ auf der Geraden $y = -x$ und Steigung $m = -1$ auf der Geraden $y = -x - 1$.

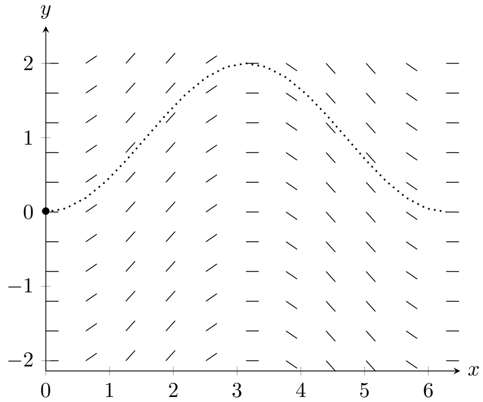


(ii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet, die Anfangsbedingungen sind durch die fetten Punkte gegeben.

(iii) Für $y(0) > -1$ haben wir $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ und für $y(0) \leq -1$ haben wir $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$.

Lösung zu Aufgabe 13

(i)



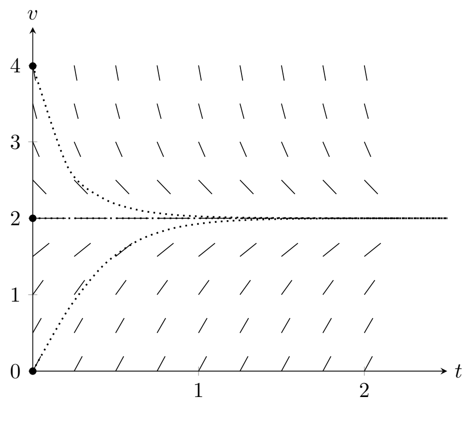
(ii) Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = -\cos(x) + C$.

(iii) Die partikuläre Lösung lautet $y(x) = -\cos(x) + 1$. Sie ist im Richtungsfeld gepunktet eingezeichnet.

Lösung zu Aufgabe 14

(i) Das Newtonsche Gesetz ist $F = ma$, wobei $a = dv/dt$. Die resultierende Kraft ist die Differenz zwischen Gewichtskraft und Strömungswiderstandskraft: $F = mg - 10v^2$. Mit $m = 10$ ergibt sich die gesuchte Gleichung.

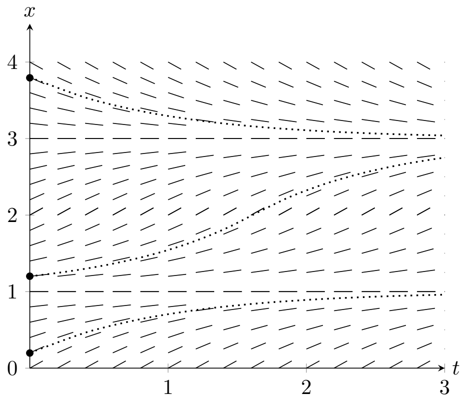
(ii)



(iii) Die Lösungskurven sind gepunktet eingezeichnet. Die Anfangsbedingungen sind durch die fetten Punkte gegeben. Unabhängig von der Anfangsbedingung ergibt sich für grosse Zeiten ($\lim_{t\to\infty}$) die Geschwindigkeit $v = 2$.

Lösung zu Aufgabe 15

(i)



(ii) Gepunktet eingezeichnet.

(iii) Für $x_0 = 0.2$ gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$, für $x_0 = 1.2, 3.8$ gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 3$.