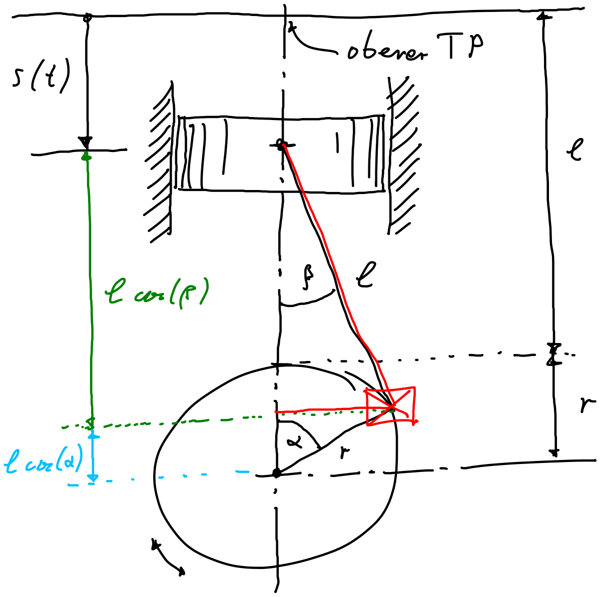
Anwendungsbeispiel: Kurbeltrieb



Ges: Beschleunigung Kolben bei konstanter Winkelgeschw. der Kurbelwelle. (daraus dann Kräfte ...)

(i) $s(t)$

Es gilt: $s(t) + \ell\cos(\beta) + r\cos(\alpha) = \ell + r$

$\longrightarrow\ s(t) = \ell\,(1 - \cos(\beta)) + r\,(1 - \cos(\alpha))$

Es gilt: $r\sin(\alpha) = \ell\sin(\beta)$

$\longrightarrow\ \cos(\beta) \underset{\uparrow}{=} \sqrt{1 - \sin^2(\beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \sin^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\alpha)}$

$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$

$\lambda = \frac{r}{\ell}$: Pleuelstangenverhältnis

$\longrightarrow\ s(t) = r\,(1 - \cos(\alpha)) + \ell\left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\alpha)}\right)$

mit $\alpha = \omega t$ (ω konst.) $\longrightarrow\ s(t) = r\,(1 - \cos(\omega t)) + \ell\left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)}\right)$

(ii) $\frac{d^2 s}{dt^2}(t) = \omega^2 \cos(\omega t) + \frac{\lambda^2 \cos^2(\omega t) - \lambda\omega^2 \sin^2(\omega t)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)}} + \frac{\lambda^3 \omega^2 \cos^2(\omega t)\sin^2(\omega t)}{\left(1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)\right)^{3/2}}$

(mühsam)

ein komplizierter Ausdruck!

(iii) Approximation: Betrachten $s(t)$:

$s(t) = r\,(1 - \cos(\omega t)) + \ell\left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)}\right)$

Idee: $\lambda = \frac{r}{\ell}$ ist "klein" (z. B. $\lambda = \frac{1}{3}$)

$\longrightarrow\ \lambda^2 \sin^2(\omega t)$ klein

$\longrightarrow$ Machen Entwicklung der Wurzel:

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots \quad \text{(Taylorreihe!)}$$

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)} = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2(\omega t) - \frac{1}{8}\lambda^4 \sin^4(\omega t) - \frac{1}{16}\lambda^6 \sin^6(\omega t) + \ldots$$

Im Bsp. $\lambda = \frac{1}{3} \longrightarrow \lambda^4 = 0.0123\ldots$ " $\longrightarrow$ " Vernachlässige Terme ab 4. Ordnung

I.e. wir verwenden Approx.:

$$s(t) \approx r\,(1 - \cos(\omega t)) + \underbrace{\frac{\ell\lambda^2}{2}}_{\frac{\ell r^2}{2\ell^2} = \frac{r^2}{2\ell}} \sin^2(\omega t)$$

$\longrightarrow \quad \dfrac{ds}{dt}(t) = r w \sin(wt) + \dfrac{r^2 w}{e} \sin(wt)\cos(wt)$

$$\frac{d^2 s}{dt^2}(t) = r w^2 \cos(wt) + \frac{r^2 w^2}{e}\Big(\underbrace{\cos^2(wt) - \sin^2(wt)}_{= \cos(2wt)} \Big)$$

I.e. $$\underline{\frac{d^2 s}{dt^2}(t) = w^2 \left(r \cos(wt) + \frac{r^2}{e} \cos(2wt) \right)}$$