# Methoden der Reihenentwicklung

**Summe:**

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$e^x(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\longrightarrow \sin(x) + e^x = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

**Produkt:**

$$e^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \dots$$

**Division:**

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \longrightarrow \tan(x)\cos(x) = \sin(x) \qquad (*)$$

Wir wissen: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Ansatz: $\tan(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

$\longrightarrow$ suchen $a_0, a_1, a_2, \dots$ in der Gl.: (siehe $(*)$)

$$\underbrace{\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\right)}_{\tan(x)}\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos(x)} = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}_{\sin(x)}$$

ausmultiplizieren der linken Seite:

$$a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right)x^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right)x^3 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Koeff.-Vergleich:

$x^0$: $\underline{a_0 = 0}$

$x^1$: $\underline{a_1 = 1}$

$x^2$: $a_2 - \frac{a_0}{2} = 0 \longrightarrow \underline{a_2} = \frac{a_0}{2} \underline{= 0}$

$x^3$: $a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6} \longrightarrow \underline{a_3} = -\frac{1}{6} + \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{3}}$

$\vdots$

$$\longrightarrow \underline{\tan(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$= \underline{x + \frac{1}{3}x^3 + \dots}$$

**Verschachtelung:**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\underline{e^{-x^2}} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \dots$$

$$= \underline{1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots}$$

$$\left[\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= 1 + (\ldots) + \frac{(\ldots)^2}{2} + \frac{(\ldots)^3}{3!} + \frac{(\ldots)^4}{4!} + \ldots \\ &\quad \sin(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \end{aligned}\right]$$

**Aufgabe:** Man entwickle $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ bis zur 4. Ordnung.

**Lösg.:**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\longrightarrow \underline{\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots}$$

**Bsp.:**

$$e^{jx} = 1 + (jx) + \frac{(jx)^2}{2} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^5}{5!} + \ldots$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ j^2 = -1}}{=} 1 + jx - \frac{x^2}{2} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$= \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots}_{\cos(x)} + j\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)}_{\sin(x)}$$

$$= \cos(x) + j\sin(x)$$

I.e. $\boxed{e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)}$

**Differenzieren:** Kann Term für Term durchgeführt werden:

**Bsp:**

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos(x).$$

**Integration:**

$$\int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^t \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)dx$$

nicht elementar integrierbar

$$= \int_0^t \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right)dx$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \ldots\right)\Bigg|_0^t$$

$$= t - \frac{t^3}{3! \cdot 3} + \frac{t^5}{5! \cdot 5} - \dots$$

**Aufgabe:** Man zeige dass $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ bis zur 4. Ordnung.

**Lösg.:** $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

$$\longrightarrow \sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= x^2 - 2\frac{x^4}{3!} + \left(\frac{2}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) x^6 + \dots$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} x^4 + \dots x^6$$

$$\cos(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)$$

$$= 1 - x^2 + \left(\frac{2}{4!} + \frac{1}{4}\right) x^4 + \dots$$

$$= 1 - x^2 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) x^4 + \dots$$

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{3} x^4 + \dots$$

$\longrightarrow \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 + \dots$ [ Terme mit $x^6$ und höheren Ordnung.