Wiederholung:

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x),$$

wobei: $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ Taylor-Polynom

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ Restglied

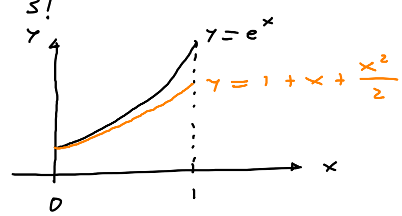
für ein ξ zwischen x & x_0.

Bsp: Fehlerabschätzung bei Approx. von $f(x) = e^x$ durch Taylorpolynom 2. Ordnung bei $x_0 = 0$ im Intervall $[0,1]$.

Polynom: $p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Restglied: $R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3 = \frac{e^\xi}{3!} x^3$ für ein $\xi \in [0,1]$

Es gilt: $\underset{\text{Funktion}}{f(x)} = \underset{\text{Polynom}}{p_2(x)} + \underset{\text{Restglied}}{R_2(x)}$



Fehlerabschätzung: $e^\xi \underset{\xi \in [0,1]}{\leq} e^1$

$$\longrightarrow R_2(x) = \frac{e^\xi}{3!} x^3 \leq \frac{e^1}{3!} \underset{x \leq 1}{x^3} \leq \frac{e^1}{3!} = \frac{e}{6} \approx 0.45$$

maximaler Fehler!

Taylorreihen

Falls $f(x)$ bei x_0 beliebig oft diff'bar ist, dann existiert Taylorpolynom von beliebigem Grad n.

Mit $\lim_{n \to \infty}$ bekommt man eine Reihe, i.e. unendliche Summe:

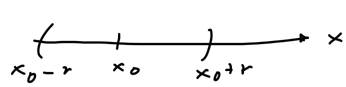
$$(*) \quad \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Diese Reihe heisst Taylorreihe mit Zentrum x_0 der Fkt. $f(x)$.

(Falls $x_0 = 0$: MacLaurin-Reihe)

Frage: Wann ex. $(*)$ und approx. Fkt. $f(x)$?

Betrachten Intervall: $(x_0 - r, x_0 + r) = I$



Falls $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für $x \in I$

$\longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ existiert und

es gilt: $\underline{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$ für $x \in I$.

Bsp: $\underline{f(x) = e^x \text{ bei } x_0 = 0:}$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Was ist $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$?

x ist Zahl, z. B. $x = 17$.

$$\frac{17^n}{n!} = \frac{\overbrace{17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 17}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}_{n \text{ Faktoren}}} = \underbrace{\frac{17}{1} \cdot \frac{17}{2} \cdot \frac{17}{3} \cdot \frac{17}{4} \cdots \frac{17}{17}}_{=C} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{17}{19} \cdots \frac{17}{n}$$

$$= C \, \frac{17}{18} \cdot \frac{17}{19} \cdots \frac{17}{n}$$

$$< C \, \underbrace{\frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18} \cdots \frac{17}{18}}_{n-17 \text{ Faktoren}} = C \underbrace{\Big(\underbrace{\frac{17}{18}}_{<1}\Big)^{n-17}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

I. e. $\lim_{n\to\infty} \frac{17^n}{n!} = 0$

analog: $\underline{\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0}$

Somit folgt: $\underline{\lim_{n\to\infty} R_n(x)} \leq \lim_{n\to\infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^x \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \underline{0}$

$$\longrightarrow \underline{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \underline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

Aufgabe: Man finde Taylorreihe für $f(x) = \sin(x)$ bei $x_0 = 0$

und zeige: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Lösg.: $f(0) = \sin(0) = 0$ $\longrightarrow$ $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

$f'(0) = \cos(0) = 1$

$f''(0) = -\sin(0) = 0$ $\qquad = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$

$f'''(0) = -\cos(0) = -1$

$\vdots \qquad \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \end{matrix}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Restglied: $\sin(x) = p_n(x) + R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \, x^{n+1}$$

$|f^{(n+1)}(\xi)|$ ist entweder $|\cos(\xi)| \leq 1$

oder $|\sin(\xi)| \leq 1$

$$\longrightarrow |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \, x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\longrightarrow \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

Somit stimmt Gl.: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Analog findet man: $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n}}{(2n)!}$

Bem:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 + \ldots$$

für $x_0 = 0$ & x nahe bei x_0.