## Wiederholung

Approx. $f(x)$ (bei $x_0 = 0$) durch Polynom $p(x)$ $n$-ter Ordnung,

so dass: Ableitungen von $p(x)$ & $f(x)$ stimmen bei $x_0 = 0$ überein

I.e.

$$p(0) = f(0)$$
$$p'(0) = f'(0)$$
$$\vdots$$
$$p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

(weitere Ableitungen von $p(x)$ verschwinden).

Konsequenzen, Bsp.: $p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

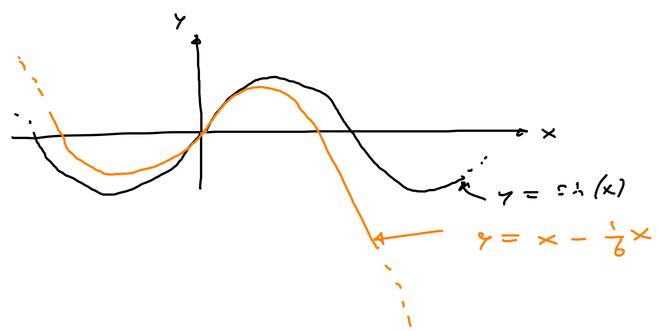
$$\longrightarrow \quad p(0) = a_0 \overset{!}{=} f(0)$$
$$p'(0) = a_1 \overset{!}{=} f'(0)$$
$$p''(0) = 2a_2 \overset{!}{=} f''(0)$$
$$p'''(0) = 6a_3 \overset{!}{=} f'''(0)$$

$$\longrightarrow \quad \underline{p(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x}_{\text{Lin. Approx.}} + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3}$$

**Konkretes Bsp.:** $f(x) = \sin(x)$ approx. bei $x_0 = 0$ mit $p(x)$ 3. Ordnung:

$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = \cos(0) = 1$$
$$f''(0) = -\sin(0) = 0$$
$$f'''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$\longrightarrow \quad \underline{f(x) \approx p(x) = x - \frac{1}{6}x^3}$$




**Allgemein:** Polynom vom Grad $n$:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Formel für $a_k$?

Einziger Term in $p^{(k)}(0)$ ungleich Null ist:

$$p^{(k)}(0) = k!\, a_k \qquad \text{benötigen } p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$

$$\longrightarrow \quad \underline{p_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \underline{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}$$

Für $x_0 \neq 0$: – Ableitungen müssen bei $x_0$ ausgewertet werden
– Polynom in $\Delta x = x - x_0$

$\rightarrow$ Def.: Taylor-Polynom $n$-ter Ordnung von $f(x)$ an Stelle $x_0$:

$$\boxed{p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

Bem.: (i) Die Approx. ist dann: $f(x) \approx p_n(x)$
(ii) Taylorpolynom hängt ab von $f(x)$ & $x_0$.

Bsp.: Taylor Polynom 3-ter Ordnung von $f(x) = \log(x)$ bei $x_0 = 1$:

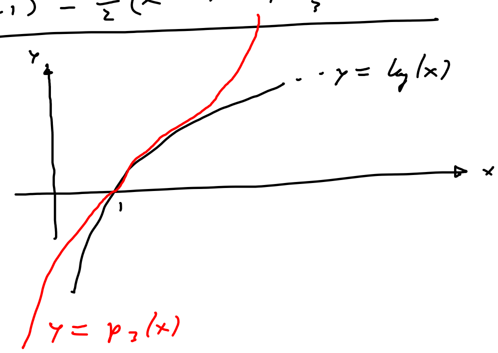
$f(x_0) = f(1) = \log(1) = 0 \longrightarrow a_0 = f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow f'(1) = 1 \longrightarrow a_1 = f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \longrightarrow f''(1) = -1 \longrightarrow a_2 = \frac{f''(1)}{2} = -\frac{1}{2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \longrightarrow f'''(1) = 2 \longrightarrow a_3 = \frac{f'''(1)}{6} = \frac{1}{3}$

$\longrightarrow \underline{\log(x) \approx p_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3}$




Aufgabe: Taylor-Polynom 2. Ordnung von $f(x) = \sqrt{1+x}$
bei (i) $x_0 = 0$
(ii) $x_0 = 3$

Lsg.: (i) $f(0) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

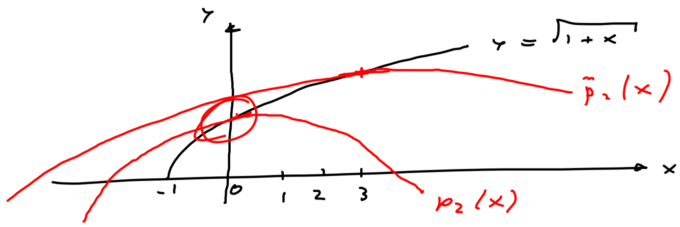
$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \longrightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$

$\longrightarrow \underline{p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2}$

(ii) $f(3) = \sqrt{1+3} = 2$

$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{1+3}} = \frac{1}{4}$$

$$f''(3) = -\frac{1}{4}(1+3)^{-3/2} = -\frac{1}{4}\cdot 2^{-3} = -\frac{1}{32} \longrightarrow \tilde{p}_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) - \frac{1}{64}(x-3)^2$$



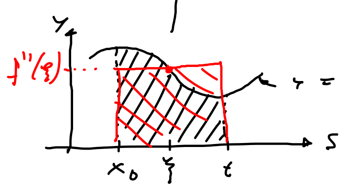

## Restglied

### Herleitung für 1. Ordnung

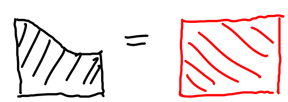
(1) $$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \quad (\text{Fundamentalsatz})$$

(2) $$f'(t) = f'(x_0) + \int_{x_0}^{t} f''(s)\,ds \quad (\text{—"—})$$

$$\int_{x_0}^{t} f''(s)\,ds = f''(\xi)\int_{x_0}^{t} ds = f''(\xi)(t-x_0)$$




I.e. es gibt ein $\xi \in [x_0, t]$, so dass



(2) $\longrightarrow$ $f'(t) = f'(x_0) + f''(\xi)(t-x_0)$

(1) $\longrightarrow$ $$\boxed{f(x)} = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \big(f'(x_0) + f''(\xi)(t-x_0)\big)\,dt$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(\xi)\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\,dt$$

$$= \boxed{\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{Taylorpolynom 1. Ordnung}} + \underbrace{\frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2}}_{\text{Restglied}}}$$

## Allgemein:

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

wobei: $$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \text{Taylor-Poly.}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \text{Restglied}$$

wobei $\xi$ zw. $x_0$ & $x$.

<u>Bem.:</u> (i) $\xi$ ist i.A. nicht bekannt

(ii) $R_n(x)$ liefert <u>Fehlerabschätzung</u> zu. $f(x)$ & der Approx. durch $p_n(x)$.

(iii) $R_n(x)$ nicht auswendig!