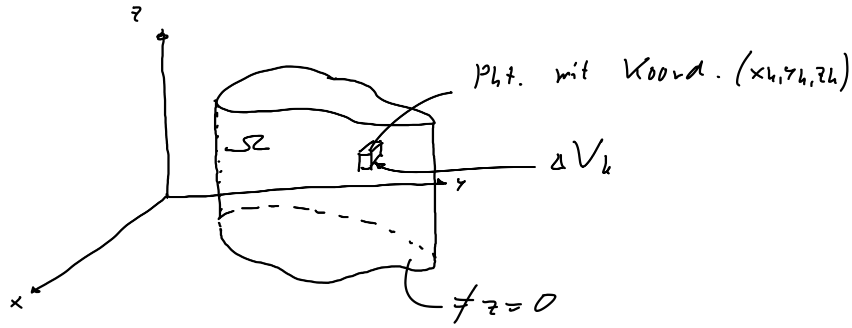
Bemerkung:

3-dim. Integrale

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$$
$$(\Omega \subset \mathbb{R}^3)$$

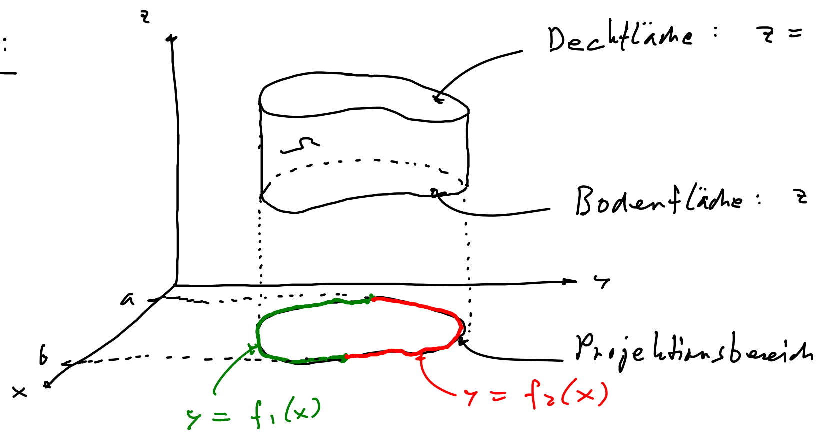


- Unterteilung in n Teilbereiche.
  k-te Teilbereich mit Volumen ΔV_k
- Wählen Pkt. (x_k, y_k, z_k) in k-ten Teilbereich
  $\longrightarrow f(x_k, y_k, z_k)$

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta V_k \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k}$$

(falls lim ex.)

Berechnung:



Integralgrenzen:
$$g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)$$
$$f_1(x) \le y \le f_2(x)$$
$$a \le x \le b$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \int_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Anwendungen:

(i) **Volumen:** $V = \iiint_\Omega dV$

(Analogie: Länge: $\int_a^b dx = b - a$

Fläche: $\iint_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} dA = |\Omega|$)

(ii) **Durchschnitt von f in Ω:**

$$\bar{f} = \frac{1}{|\Omega|} \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV \qquad \left(|\Omega| = \iiint_\Omega dV \right)$$

(iii) **Masse:**

$$M = \iiint_\Omega \overbrace{\rho(x,y,z)\,dV}^{dm} \quad \left(\underset{\rho - \text{konst.}}{=} \rho \iiint_\Omega dV = \rho|\Omega| \right)$$

ρ: Dichte

(iv) **Schwerpkt.:**

$$x_S = \frac{1}{M} \iiint_\Omega x\,\rho(x,y,z)\,dV$$

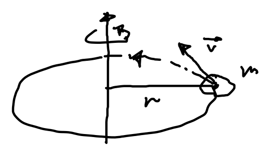
$$y_S = \frac{1}{M} \iiint_\Omega y\,\rho(x,y,z)\,dV$$

$$z_S = \dots$$

Trägheitsmoment (bezgl. Achse!)

$$J = \frac{L}{\omega}$$

L ← Drehimpuls, ω ← Winkelgeschw.



$$L = p\,r = m|\vec v|\,r = m\omega r^2$$

p: Impuls, r: Radius

$$\longrightarrow \underline{J} = \frac{m\omega r^2}{\omega} = \underline{m r^2}$$

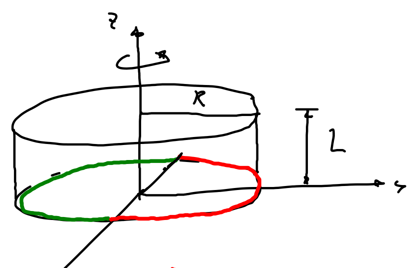
Mehrere Massen: $J = \sum_i m_i r_i^2$

Ann.: ρ konst.

Ausgedehnter Körper:

$$\underline{J} = \iiint_V r^2 \underbrace{dm}_{=\rho dV} = \underline{\rho \iiint_V r^2\,dV}$$

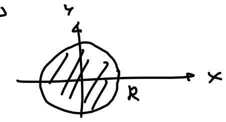
Bsp.: **Zylinder:**



$$J = \rho \iiint_V r^2\,dV = \rho \int_{x=-R}^{R} \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} \int_{z=0}^{z=L} \underbrace{(x^2+y^2)}_{=r^2}\,dz\,dy\,dx$$

$$= \rho \int_{x=-R}^{R} \int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2)\,\underbrace{z\Big|_0^L}_{=L}\,dy\,dx$$

$$= \rho L \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ Doppelintegral über 

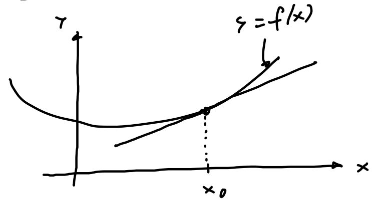
$$= \rho L \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} r^3 \, dr \, d\varphi$$

$$= \rho L \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{\rho L R^4 \pi}{2}$$

mit: $M = \rho V = \rho R^2 \pi L \longrightarrow \underline{\underline{J = \frac{M R^2}{2}}}$

Potenzreihenentwicklung

Erinnerung: <u>Lineare Approx.</u>



$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)}$$

$= L(x)$: Gl. der Tang. an $y = f(x)$ im Pkt. $(x_0, f(x_0))$

$$L(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$$
$$= f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0) \cdot \Delta x$$

$L(x)$ ist <u>linear</u> in Δx ⚠

i.e. $L(x)$ ist Polynom 1. Ordng in Δx.

<u>Idee:</u> Bessere Approx. durch Polynom 2., 3., 4., ... Ordnung.

Taylor-Polynome

Sei $f(x)$ eine Fkt., die in Umgebung von $x_0 = 0$ durch Polynom $p(x)$ von Ordnung n approx. werden soll.

Idee der Approx.: $\boxed{\text{Alle Ableitungen von } p(x) \text{ und } f(x) \text{ stimmen in } x_0 = 0 \text{ überein}}$

I.e.

$$p(0) = f(0)$$
$$p'(0) = f'(0)$$
$$p''(0) = f''(0)$$
$$\vdots$$
$$p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

(weitere Ableitungen des Polynoms verschwinden, i.e. $p^{(k)}(0) = 0$ für $k > n$)

Die obigen Gl. erlauben es die Koeff. des Polynoms zu bestimmen.

Bsp: $n=3$: $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$\longrightarrow$ $p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$

$p''(x) = 6a_3x + 2a_2$

$p'''(x) = 6a_3$

Soll gelten für Approx. !

bei $x=0$:

$p(0) = a_0 \overset{!}{=} f(0)$

$p'(0) = a_1 \overset{!}{=} f'(0)$

$p''(0) = 2a_2 \overset{!}{=} f''(0)$

$p'''(0) = 6a_3 \overset{!}{=} f'''(0)$

$\longrightarrow$ $a_0 = f(0)$

$a_1 = f'(0)$

$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$

$a_3 = \frac{f'''(0)}{6}$

$\longrightarrow$ I.e. Polynom lautet:

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

und es gilt:

$$f(x) \approx p(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)x}_{\text{Lin. Approx.}} + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3$$

Konkretes Bsp.:

$f(x) = e^x$ bei $x=0$ durch Polynom 3. Ordnung approx. werden:

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = e^0 = 1$

$f''(0) = e^0 = 1$

$f'''(0) = e^0 = 1$

$\longrightarrow$ $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$