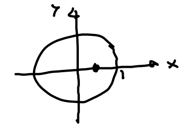
Bsp: Ges: Abs. Max./Min. von

$f(x,y) = -x^2 + y^2 + x$ in $\{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$



Innere Pkte.: $\nabla f = \begin{pmatrix} -2x+1 \\ 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0} \longrightarrow (x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 0)$

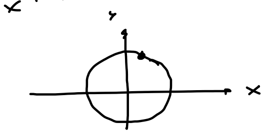
$\longrightarrow \underline{f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}}$

Rand:

oben: $F(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = -x^2 + 1 - x^2 + x = -2x^2 + x + 1$

$\uparrow$ $x \in [-1, 1]$

$\longrightarrow \frac{dF}{dx}(x) = -4x + 1 \overset{!}{=} 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$

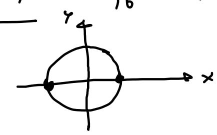


$\longrightarrow y_1 = \sqrt{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\longrightarrow \underline{f(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})} = -\frac{2}{16} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{18}{16} = \underline{\frac{9}{8}}$

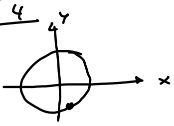
$(x_2, y_2) = (1, 0) \longrightarrow \underline{f(x_2, y_2)} = f(1,0) = \underline{0}$

$(x_3, y_3) = (-1, 0) \longrightarrow \underline{f(x_3, y_3)} = f(-1, 0) = \underline{-2}$



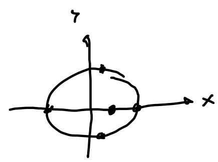
unten: $G(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2}) = -2x^2 + x + 1 \longrightarrow \frac{dG}{dx}(x) = \ldots \overset{!}{=} 0 \rightarrow \underline{x_4 = \frac{1}{4}}$

$\underline{y_4 = -\frac{\sqrt{15}}{4}}$



$\longrightarrow \underline{f(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4})} = \ldots = \underline{\frac{9}{8}}$

Pkte.	f-Werte
$(\frac{1}{2}, 0)$	$\frac{1}{4}$
$(1, 0)$	0
$(-1, 0)$	-2
$(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$	$\frac{9}{8}$
$(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$	$\frac{9}{8}$



$\longrightarrow$ Abs. Max. $= \frac{9}{8}$ bei $(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4})$

Abs. Min. $= -2$ bei $(-1, 0)$ $\quad ||$

Bem.: Alternative für Parametrisierung des Randes:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ $\qquad f(x,y) = -x^2 + y^2 + x$

$\longrightarrow F(t) = f(\vec{r}(t)) = -\cos^2(t) + \sin^2(t) + \cos(t)$.

Aufgabe: Man klassifiziere kritischen Pkt. von $f(x,y) = -x^2 + y^2 + x$

Lösg: $\nabla f = \begin{pmatrix} -2x+1 \\ 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0} \longrightarrow (x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 0)$

$f'' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow f''(\frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ $\underline{(\frac{1}{2}, 0) \text{ ist Sattel}}$.

Methode der Lagrange-Multiplikatoren

(Max./Min. unter Nebenbedingungen)

Bsp: Min./Max. von $f(x,y) = x + y$ auf $x^2 + y^2 = 1$ (*)

$\uparrow$ Nebenbedingung NB

1. Idee: $(*)$ nach y auflösen: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$\longrightarrow F_\pm(x) = f(x, y(x)) = x + y(x) = x \pm \sqrt{1-x^2}$

Oberer Rand: $F_+(x) = x + \sqrt{1-x^2}$

$$\frac{dF}{dx}(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \overset{!}{=} 0 \longrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \ / (\ldots)^2 \quad (**)$$

$$1 - x^2 = x^2$$

$$1 = 2x^2 \longrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

aber nur "+" Lsg. erfüllt $(**)$

$\longrightarrow (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\longrightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$ Max.

Unterer Rand: $F_-(x) = x - \sqrt{1-x^2}$

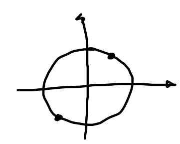
$\longrightarrow \ldots \longrightarrow (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\longrightarrow f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$ Min.

2. Idee: Parametrisierung des Kreises als Kurve $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$F(t) = f(\vec{r}(t)) = \cos(t) + \sin(t)$$



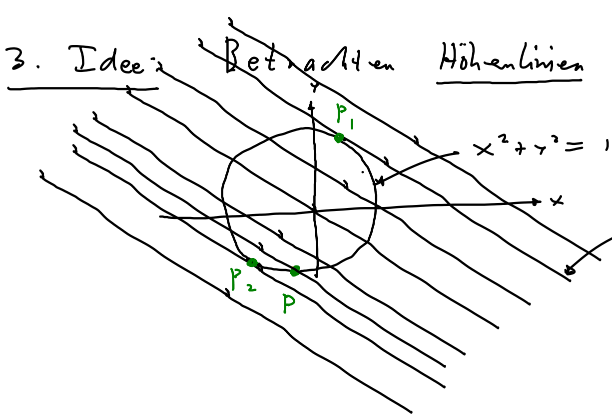
$$\frac{dF}{dt}(t) = -\sin(t) + \cos(t) \overset{!}{=} 0 \longrightarrow \sin(t) = \cos(t)$$

$\longrightarrow t = \frac{\pi}{4} \longrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\longrightarrow (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$t = \frac{5\pi}{4} \longrightarrow (x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3. Idee: Betrachten Höhenlinien von $f(x,y) = x + y$:



Höhenlinien von $f(x,y)$

Betrachten Pkt. P

Dies kann kein Extremalpkt. sein, da verschieben von P entlang Kreis grösseren & kleineren Wert von $f(x,y)$ bewirkt.

Diesen Effekt gibt es, wenn sich Höhenlinien von $f(x,y)$ & Kreis transversal schneiden.

$\longrightarrow$ Extremalpkte. sind bei P_1, P_2.

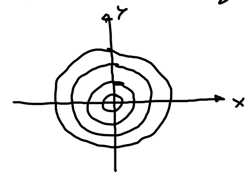
Wie findet man p_1, p_2:

Umschreiben von NB: $x^2+y^2=1$

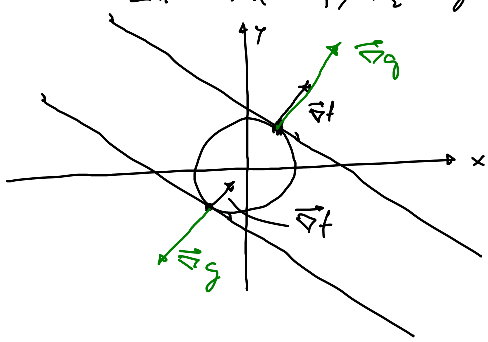
auf Form: $g(x,y)=0$

i.e. setze: $g(x,y)=x^2+y^2-1$

Höhenlinien von $g(x,y)$:



In Pkten p_1, p_2 gilt: $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$



$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ist: $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \end{cases}$

benötigen zusätzlich $g(x,y)=0$, i.e. $x^2+y^2=1$

I.e. haben System: $\begin{cases} 1 = 2\lambda x & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ 1 = x^2+y^2 & (3) \end{cases}$

$(1),(2) \rightarrow x = y = \frac{1}{2\lambda}$

in $(3) \longrightarrow 1 = \frac{1}{2\lambda^2} \rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

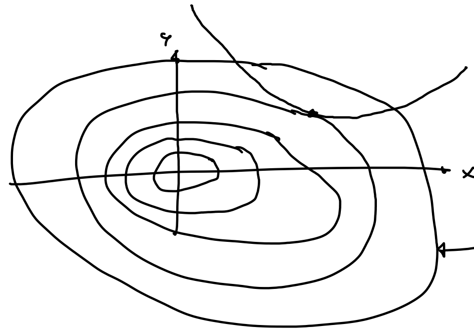
$\longrightarrow x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\longrightarrow \underline{(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$; $\underline{(x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

Allgemeine Formulierung: <u>Methode der Lagrange-Multiplikatoren</u>

Die lokalen Max./Min. von $f(x,y)$ unter NB $g(x,y)=0$ findet man durch Lösen des Systems:

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \\ g = 0 \end{cases}}$$



$g(x,y)=0$

Höhenlinien von $f(x,y)$

Bem.:

(i) Max./Min. müssen ex.

(ii) $\vec{\nabla} g \neq \vec{0}$ wird benötigt

(iii) Formulierung gilt in n Dimensionen

Aufgabe: Ges: Max./Min. von $f(x,y) = xy$ auf Ellipse $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ (mit Lagrange).

Lösg.:

$$f(x,y) = xy \qquad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \qquad \vec{\nabla} g = \begin{pmatrix} x/4 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \\ g = 0 \end{array} \right. \quad \text{ist} : \left\{ \begin{array}{ll} y = \frac{\lambda x}{4} & (1) \\ x = \lambda y & (2) \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 & (3) \end{array} \right.$$

$$\frac{(1)}{(2)} : \quad \frac{y}{x} = \frac{x}{4y} \longrightarrow 4y^2 = x^2 \longrightarrow x = \pm 2y$$

$$\text{in } (3) : \quad y^2 = 1 \longrightarrow y = \pm 1 \; ; \quad \begin{array}{l} y = 1 \longrightarrow x = \pm 2 \\ y = -1 \longrightarrow x = \pm 2 \end{array}$$

$\longrightarrow$ Pkte. für Extrema sind:

$(2,1) \longrightarrow f(2,1) = 2$ Lok. Max.

$(2,-1) \longrightarrow f(2,-1) = -2$ Lok. Min.

$(-2,1) \longrightarrow f(-2,1) = -2$ Lok. Min.

$(-2,-1) \longrightarrow f(-2,-1) = 2$ Lok. Max.