Allgemeines Kriterium für Max./Min.

Sei $f(x,y)$ gegeben.

Sei (x_0,y_0) krit. Pkt., i.e. $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)=\vec{0}$.

Man betrachtet:
$$\boxed{f'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}}$$

Falls alle EW von f'' pos. $\longrightarrow$ (x_0,y_0) Min.

——"—— neg. $\longrightarrow$ (x_0,y_0) Max.

Es gibt pos. & neg. EW $\longrightarrow$ (x_0,y_0) Sattel

Es gibt EW $=0$ $\longrightarrow$ nicht def.

Einschub: Sei A eine $n\times n$-Matrix. Ein Vektor $\vec{v}\neq\vec{0}$ heisst <u>Eigenvektor</u> (EV) zum <u>Eigenwert</u> (EW) λ, falls gilt: $\boxed{A\vec{v}=\lambda\vec{v}}$

Berechnung EW: $A\vec{v}=\lambda\vec{v} \quad / -\lambda\vec{v}$
$$A\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0}$$
$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$
$$\longrightarrow \boxed{\det(A-\lambda I)=0} \longrightarrow \lambda=\ldots$$

Bsp: $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \longrightarrow \det(A-\lambda I)=\det\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{pmatrix}$
$$=\lambda^2-1 \stackrel{!}{=} 0$$

i.e. $\lambda^2=1 \longrightarrow \underline{\lambda_\pm=\pm 1}$

$\longrightarrow$ <u>Menge der EW $=\{-1,1\}$</u> $=$ spec(A)

Notation

Bsp: (i) $f(x,y)=x^2+y^2$
$$\vec{\nabla} f=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \longrightarrow (x_0,y_0)=(0,0) : \text{krit. Pkt.}$$
$$f''=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} \longrightarrow \text{spec}(f'')=\{2\} \longrightarrow \text{alle EW pos.} \longrightarrow \underline{\text{Min. bei } (0,0)}$$

Menge der EW

$$\det(f''-\lambda I)=\det\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$
$$=\det\begin{pmatrix}2-\lambda&0\\0&2-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)^2-0=0$$

i.e. $(2-\lambda)^2=0$

i.e. $2-\lambda=0$

i.e. $\underline{\lambda=2}$

(ii) $f(x,y)=-x^2-y^2+4$
$$\vec{\nabla} f=\begin{pmatrix}-2x\\-2y\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0} \longrightarrow (x_0,y_0)=(0,0) : \text{krit. Pkt.}$$
$$f''=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix} \longrightarrow \text{spec}(f'')=\{-2\} \longrightarrow \text{Alle EW neg.} \longrightarrow \underline{\text{Max. bei } (0,0)}.$$

(iii) $f(x,y) = x^2 - y^2$

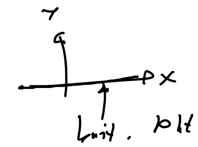
$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0} \longrightarrow (x_0, y_0) = (0,0)$: krit. Pkt.

$f'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \operatorname{spec}(f'') = \{-2, 2\}$

$\longrightarrow$ pos. & neg. EW $\longrightarrow$ <u>Sattel bei $(0,0)$</u>

(iv) $f(x,y) = y^2$

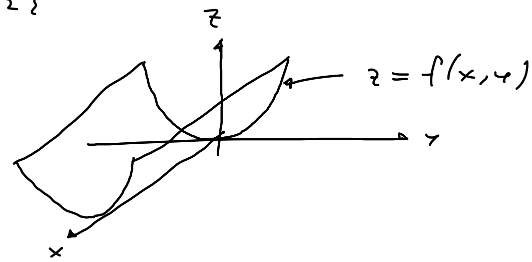
$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0} \longrightarrow (x_0, y_0) = (t, 0)$ mit $t \in \mathbb{R}$



$f'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \operatorname{spec}(f'') = \{0, 2\}$

$\longrightarrow$ Gibt EW $= 0$

$\longrightarrow$ <u>nicht def.</u>



<u>Aufgabe:</u> Sei $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$

Man finde und klassifiziere die krit. Pkte.

[Hinweis für EW: $\det(f'' - \lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda = \ldots$]

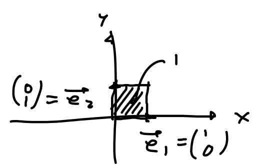
[Hinweis: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

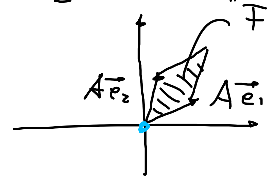
<u>Def.:</u> $\det(A) = ad - bc$]

$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$

$\underbrace{(A - \lambda I)}_{\tilde{A}} \vec{v} = \vec{0}$

"Fläche" $= \det(A)$





<u>Lösg.:</u> $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} y - 2x - 2 \\ x - 2y - 2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$

I.e. $\begin{cases} y - 2x - 2 = 0 & (1) \\ x - 2y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \longrightarrow x = -1 + \frac{y}{2}$ in (2) $\longrightarrow -1 + \frac{y}{2} - 2y - 2 = 0$

$\longrightarrow -3 - \frac{3}{2} y = 0$

$\longrightarrow y = -2 \longrightarrow x = -1 - 1 = -2$

I.e. <u>$(x_0, y_0) = (-2, -2)$</u> : krit. Pkt.

$f'' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\det(f'' - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

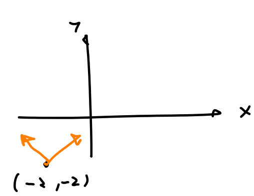
$= \det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix}$

$= (\lambda + 2)^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 \overset{!}{=} 0$

$\longrightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = -2 \pm 1$

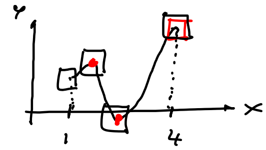
$\longrightarrow \operatorname{spec}(f'') = \{-3, -1\}$

$\longrightarrow$ <u>Max. bei $(-2, -2)$</u>



Absolute Extrema in begrenzten Gebieten

[Erinnerung in 1D:



]

Vorgehen:

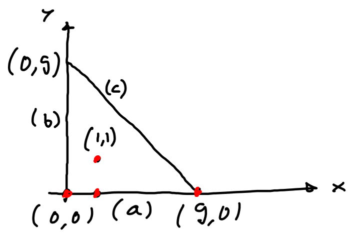
(i) Innere Pkte. finden mit $\vec{\nabla} f = \vec{0}$
f an diesen Pkten. auswerten.

(ii) Rand untersuchen $\longrightarrow$ rel. Max./Min. entlang Rand

(iii) größten, resp. kleinsten Wert aus (i), (ii) $\longrightarrow$ absolute Max./Min.

Bsp: $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$

Ges: Abs. Max./Min. in Gebiet des 1. Quadranten, begrenzt durch $x = 0$; $y = 0$; $y = 9 - x$



(i) innere Pkte: $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2 - 2x \\ 2 - 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$

$\longrightarrow (x_0, y_0) = (1,1)$

$f(1,1) = 4$

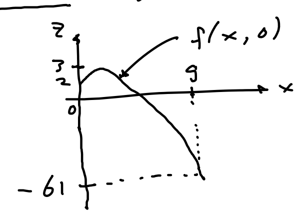
(ii) Randpunkte: (a) Betrachte: $g(x) = f(x,0) = 2 + 2x - x^2$ für $x \in [0,9]$

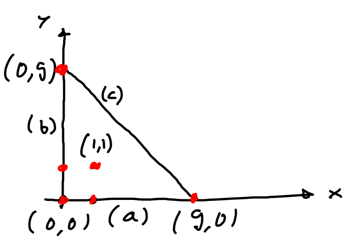
Extremwerte: $\frac{dg}{dx}(x) = 2 - 2x \overset{!}{=} 0 \rightarrow x = 1$

$f(1,0) = g(1) = 3$

Intervallränder: $f(0,0) = g(0) = 2$

$f(9,0) = g(9) = -61$





(b) Betrachten:

$h(y) = f(0,y) = 2 + 2y - y^2$ für $y \in [0,9]$

Extremwerte: $\frac{dh}{dy}(y) = 2 - 2y \overset{!}{=} 0 \longrightarrow y = 1$

$\longrightarrow f(0,1) = h(1) = 3$

Intervallränder: $(f(0,0) = 2)$

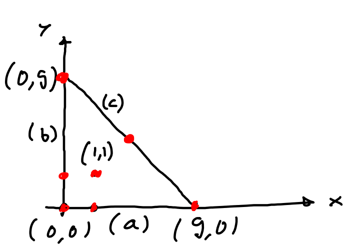
$f(0,9) = h(9) = -61$

(c) Rand: $y = 9 - x$

$\longrightarrow$ betrachten $k(x) = f(x, 9-x)$ für $x \in [0,9]$

$= 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2$

$= -61 + 18x - 2x^2$



Extremwerte: $\frac{dk}{dx}(x) = 18 - 4x \overset{!}{=} 0 \rightarrow x = \frac{9}{2}$

$\longrightarrow f(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}) = k(\frac{9}{2}) = -\frac{41}{2}$

$9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$

Liste:

Pkte:	Fkt.-Werte
$(0,0)$	2
$(0,1)$	3
$(1,0)$	3
$(1,1)$	4
$(9,0)$	-61
$(0,9)$	-61
$(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$	$-\frac{41}{2}$

$\longrightarrow$ abs. Max. $= 4$ bei $(1,1)$

—"— Min. $= -61$ bei $(9,0)$ & $(0,9)$