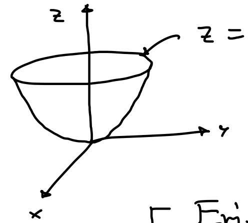
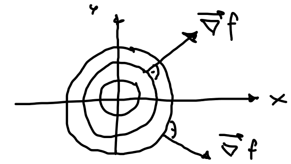
Gradient: $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

Eigenschaft: $\vec{\nabla} f \perp$ zu Höhenlinien von f.



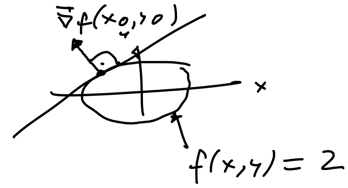
$z = f(x,y) = x^2 + y^2 \longrightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

Höhenlinien:



[Erinnerung (letztes mal):

$4x^2 + y^2 = 2$



$f(x,y) = 4x^2 + y^2$

$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$

$\vec{\nabla} f \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$ Gl. Tang.]

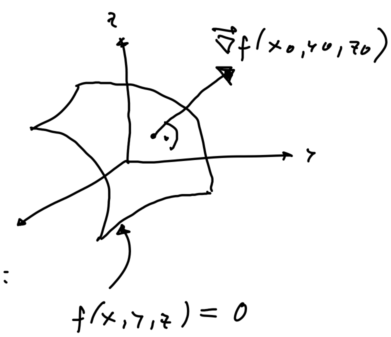
In 3D:

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Eigenschaft: $\vec{\nabla} f \perp$ zu Niveauflächen.

Bsp: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - 9$

Ges: Tang. Ebene an Fläche $f(x,y,z) = 0$ im Pkt. $(1,2,4)$.



$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{\nabla} f(1,2,4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{\nabla} f(1,2,4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ebenengl.: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$ ist:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 4 \end{pmatrix} = 0$$

i.e. $\underline{2x + 4y + z - 14 = 0}$

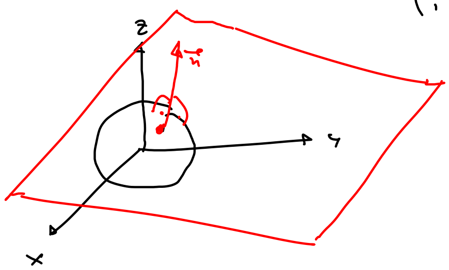
Aufgabe: Man finde Tang.-Ebene an Kugeloberfläche der Kugel mit Radius $\sqrt{3}$ am Ursprung, im Pkt. $(1,1,1)$.

Hinweis: Gl. Kugeloberfläche: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

(Allg.: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$)

Lösg.: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 \longrightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\nabla} f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

verwenden: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.



Gl. ist: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$

$\longrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$

I.e. $\underline{x+y+z-3=0}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$

$2x+2y+2z-6=0 \;/:2$

$\underline{x+y+z-3=0}$

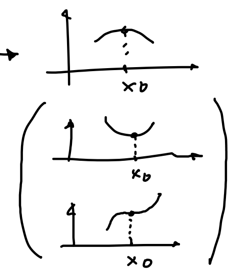
Extremalstellen: (Max., Min., Sattel, ...)

Erinnerung: Flt. von 1 Var.:

(i) $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$: krit. Pkt.

(ii) $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0) < 0$

$\Big\}$ x_0 Max.



$f(x,y)$ besitzt an der Stelle (x_0,y_0) ein rel. Max., bzw. rel. Min., falls in einer Umgebung von (x_0,y_0) (ohne (x_0,y_0)) gilt:

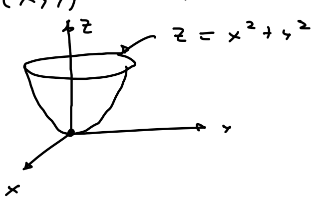
$f(x_0,y_0) > f(x,y)$ (Max.)

bzw.

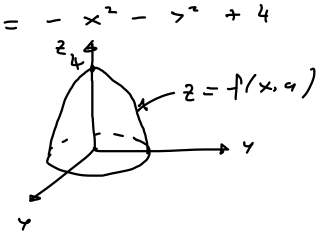
$f(x_0,y_0) < f(x,y)$ (Min.)

Bsp: (i) $f(x,y) = x^2+y^2$ besitzt Min. in $(0,0)$, da:

$f(x,y) = x^2+y^2 > 0 = f(0,0)$ in Umgebung von $(0,0)$.



(ii) $f(x,y) = -x^2-y^2+4$ besitzt Max. bei $(0,0)$



Falls $f(x,y)$ Max. oder Min. bei $(x_0,y_0) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$

$\longrightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \vec{0} \text{ ist notwendige Bedingung für Max. oder Min.}}$

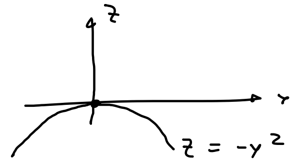
Wir nennen einen Pkt. (x_0,y_0) mit $\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \vec{0}$ kritischen Pkt. von f.

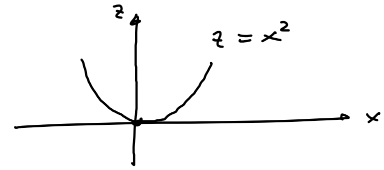
Obige Bed. ist notwendig, aber nicht hinreichend für Max. / Min!

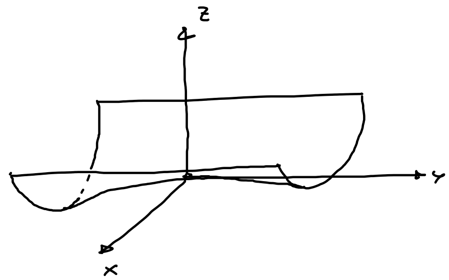
Bsp: $f(x,y) = x^2 - y^2 \longrightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0} \longrightarrow \underline{(x_0, y_0) = (0,0)}$

Aber $(0,0)$ ist weder Min. noch Max.!

Schnittkurven: $\underline{x = 0:}$ $\underline{y = 0:}$







Sattelpunkt

Allgemeines Kriterium für Max./Min.

Sei $f(x,y)$ gegeben.

Sei (x_0, y_0) krit. Pkt., i.e. $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$.

Man betrachtet:

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Falls alle EW von f'' pos. $\longrightarrow$ (x_0, y_0) Min.

— " — neg. $\longrightarrow$ (x_0, y_0) Max.

Es gibt pos. & neg. EW $\longrightarrow$ (x_0, y_0) Sattel

Es gibt EW $= 0$ $\longrightarrow$ nicht def.