Wiederholung:

Gradient:

$$\boxed{\vec\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

Eigenschaften:

(i) Die Ableitung von f ist am grössten in Richtung von $\vec\nabla f$. Ableitung in diese Richtung ist $|\vec\nabla f|$.

(ii) Ableitung $\perp$ zu $\vec\nabla f$ ist gleich Null, i.e. $\vec\nabla f$ $\perp$ zu Höhenlinien.

(iii) Richtungsableitung: $D_{\vec e} f = \vec e \cdot \vec\nabla f$

Aufgabe:

Sei $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, Pkt. $(-1,1)$.

Ges: Richtung in welcher Fkt. am stärksten wächst & Ableitung in diese Richtung.

Lösg.: $\vec\nabla f = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{pmatrix} \longrightarrow \vec\nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \underline{\vec e = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$$\underline{D_{\vec e} f} = \vec e \cdot \vec\nabla f(-1,1) = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt2} = \underline{\sqrt2}$$

oder: $\underline{D_{\vec e} f} = |\vec\nabla f| = \underline{\sqrt2}$.

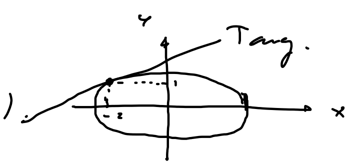
Erinnerung: $D_{\vec e} f = \vec e \cdot \vec\nabla f = e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y}$

ist $\frac{dF}{dt}(t)$ mit $F(t) = f(\vec r(t))$

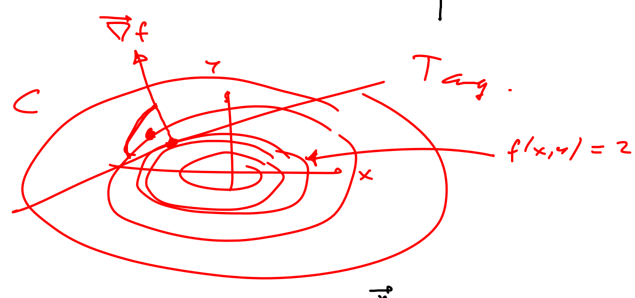
$\vec r(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\vec e \;;\; t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe:

Man finde eine kartesische Gl. für Tang. an die Ellipse: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ im Pkt. $(-2,1)$.



Lösg.: Idee: Ellipse ist Höhenlinie der Fkt. $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 = C$

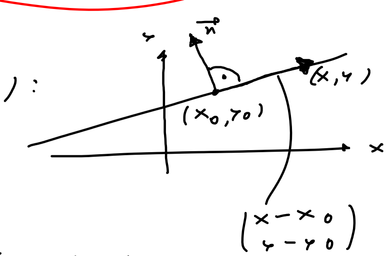


$\longrightarrow$ Tang. $\perp$ zu $\vec\nabla f$.

$\vec\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ 2y \end{pmatrix} \longrightarrow \vec\nabla f(-2,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Geradengl.: Gerade $\perp$ zu $\vec n$ durch Pkt. (x_0,y_0):

$$\vec n \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$



mit $\vec n = \vec\nabla f(-2,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $(x_0,y_0) = (-2,1)$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ist:} \quad -x-2+2y-2 = 0$$

oder: $\underline{x - 2y + 4 = 0}$

Rechenregeln Gradient: Seien $f(x,y)$, $g(x,y)$ gegebene Flt.

$C \in \mathbb{R}$ ← konst.

(i) $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$

(ii) $\vec{\nabla}(Cf) = C\,\vec{\nabla} f$

(iii) $\vec{\nabla}(fg) = f\,\vec{\nabla} g + g\,\vec{\nabla} f$

Gravitation: Feld, Potential, Kraft

$\vec{g}$ $\qquad \phi \qquad$ $\vec{F}_g$

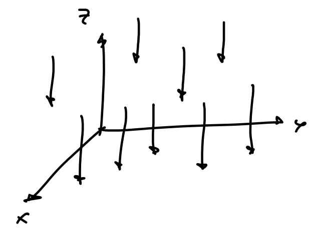
Es gilt: $\vec{F}_g = m\vec{g}$: Kraft auf Masse

$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$

(i) **Erdnähe**

$$\phi(x,y,z) = \overset{\text{Konst.}}{g}\,z$$

$$\longrightarrow \vec{g} = -\vec{\nabla}\phi = -\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$



Kraft auf Körper der Masse m:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$\boxed{m}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \vec{F}_g$

(ii) Allgemein: Planet der Masse M im Ursprung: (0,0,0)

$$\phi(x,y,z) = -\frac{GM}{r} \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

G = konst.

$$\longrightarrow \vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\underline{\frac{\partial\phi}{\partial x}} = -GM\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

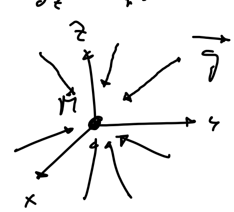
$$= -GM\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -GM\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$$

$$= \frac{GM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\cdot x = \underline{\frac{GM}{r^3}x} \; ;$$

Analog: $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{GM}{r^3}y$; $\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{GM}{r^3}z$

$$\longrightarrow \vec{\nabla}\phi = \frac{GM}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{g} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{GM}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$\longrightarrow \underline{\vec{F}_g} = m\vec{g} = \underline{-\frac{GMm}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \; ; \; |\vec{F}_g| = \frac{GMm}{r^3}\underbrace{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right|}_{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

Elektrostatik: Feld ; Potential ; Kraft

$\vec{E}$; ϕ ; $\vec{F}_E$

Es gilt: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

$\vec{F}_E = q\vec{E}$

Aufgabe: Sei $\phi(x,y) = -Cxy$ (C: konst.)

Man bestimme und skizziere Höhenlinien und skizziere die Feldlinien (sind $\perp$ zu Höhenlinien).

Lsg.: $\phi(x,y) = C \longrightarrow xy = C$; $C = 0 \longrightarrow x = 0$ oder $y = 0$

$C \neq 0 \longrightarrow y = \frac{C}{x}$