Wiederholung

Bsp: $f(x,y) = x^2 + y^2$ Flt. von 2 Var.

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}$ Kurve in $x-y-$Ebene

Hintereinanderschaltg: $F(t) = f(\vec{r}(t))$

$= f(x(t), y(t))$

$= x(t)^2 + y(t)^2$

$= t^2 + (1-t)^2 = \underline{2t^2 - 2t + 1}$

Kettenregel: $\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t)$

Kompakt: $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

Mit $f(x,y) = x^2 + y^2 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = 1 \ ; \ \frac{dy}{dt} = -1$

$\longrightarrow \underline{\frac{dF}{dt}(t)} = \underbrace{2x(t)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} \cdot \underbrace{1}_{\frac{dx}{dt}} + \underbrace{2y(t)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\frac{dy}{dt}} = 2t - 2(1-t) = \underline{4t-2}$

Aufgabe: $F(t) = f(\vec{r}(t))$ Ges: $\frac{dF}{dt}(t)$

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 + \cos(t) \\ 2 + \sin(t) \end{pmatrix}$

Lösg: $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

$= 2x(t)(-\sin(t)) + 2y(t)\cos(t)$

$= -2(2+\cos(t))\sin(t) + 2(2+\sin(t))\cos(t)$

$= \underline{4(\cos(t) - \sin(t))}$

Richtungsableitung Geg: $f(x,y)$

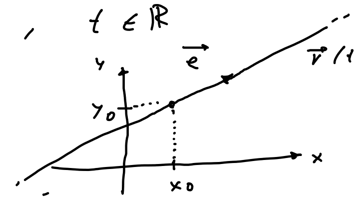
$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$: Einheitsvektor, i.e. $|\vec{e}| = 1$

Punkt (x_0, y_0)

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\vec{e}$, $t \in \mathbb{R}$

i.e. $x(t) = x_0 + t e_x$

$y(t) = y_0 + t e_y$



Sei: $F(t) = f(\vec{r}(t))$

$$\longrightarrow \underline{\frac{d\tilde{f}}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\, e_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, e_y}$$

<u>Richtungsableitung</u> von f im Pkt. (x_0,y_0) in Richtung $\vec{e}$.

Notation: $\underline{D_{\vec{e}} f(x_0,y_0)}$

<u>Bsp:</u> $f(x,y) = x^2+y^2$ abgeleitet in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, im Pkt. $(2,1) = (x_0,y_0)$

Benötigen Einheitsvektor: $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \underline{D_{\vec{e}} f(x_0,y_0)} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{2x_0}\frac{1}{\sqrt{2}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{2y_0}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{6}{\sqrt{2}}}$$

<u>Gradient</u>

Sei $f(x,y)$ geg.

Gradient von $f(x,y)$ an Stelle (x_0,y_0) ist:

$$\boxed{\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}}$$

Kompakt: $\underline{\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}}$

Analog für $f(x,y,z)$:

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

<u>Bsp:</u> $f(x,y) = 2x + 3y^2$

$$\underline{\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix}2\\ 6y\end{pmatrix}}.$$

<u>Aufgabe:</u> Man finde $\vec{\nabla} f$ für $f(x,y) = x^2 \sin(5y)$

<u>Lösg.:</u> $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix}2x\sin(5y)\\ 5x^2\cos(5y)\end{pmatrix}$

Mit $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$ ist Richtungsableitung: $D_{\vec{e}} f = \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_x\\ e_y\end{pmatrix} = \vec{\nabla} f\cdot\vec{e}$$

I.e. <u>Richtungsabl.:</u> $\boxed{D_{\vec{e}} f = \vec{e}\cdot\vec{\nabla} f}$

Bsp: $f(x,y) = x^2+y^2$ in Richtung $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$:

$$\underline{D_{\vec{e}} f} = \vec{e}\cdot\vec{\nabla} f = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(2x+2y)} \quad \left(D_{\vec{e}} f(2,1) = \frac{6}{\sqrt{2}}\right)$$

Aufgabe: $f(x,y) = x^2 y^3$ abgeleitet in Richtung von $\vec{v} = \binom{1}{2}$ im Pkt. $(2,1)$.

Lösg.: $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{1}{2}$; $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \quad D_{\vec{e}} f = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{1}{\sqrt{5}} \binom{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2xy^3 + 6x^2y^2 \right)$$

$$\longrightarrow \quad \underline{D_{\vec{e}} f(2,1)} = \frac{1}{\sqrt{5}} (4 + 24) = \underline{\frac{28}{\sqrt{5}}}$$

Aufgabe: Ges.: Richtungsableitung von $f(x,y)$ in Richtung x-Achse & y-Achse.

Lösg.: x-Achse: $\vec{e} = \binom{1}{0} \longrightarrow D_{\vec{e}} f = \binom{1}{0} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}$

y-Achse: $\vec{e} = \binom{0}{1} \longrightarrow D_{\vec{e}} f = \binom{0}{1} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Bem.: (i) Für $\vec{e}$ in $D_{\vec{e}} f$ muss Einheitsvektor verwendet werden, da sonst $D_{\vec{e}} f$ nicht die Steigung beschreibt.

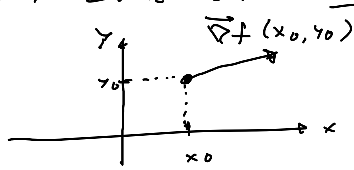
Bsp.: $D_{\binom{1}{0}} f = \binom{1}{0} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}$

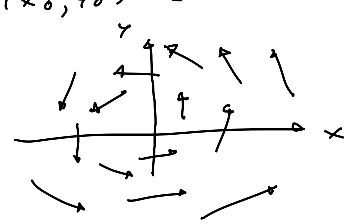
$D_{\binom{2}{0}} f = \binom{2}{0} \cdot \vec{\nabla} f = 2 \frac{\partial f}{\partial x}$ <u>nicht</u> die Steigung!

(ii) Zuordnung: $D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$

$(x_0, y_0) \longmapsto \vec{\nabla} f(x_0, y_0)$

ordnet jedem <u>Pkt. (x_0, y_0)</u> in der x-y-Ebene einen <u>Vektor</u> $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ zu.





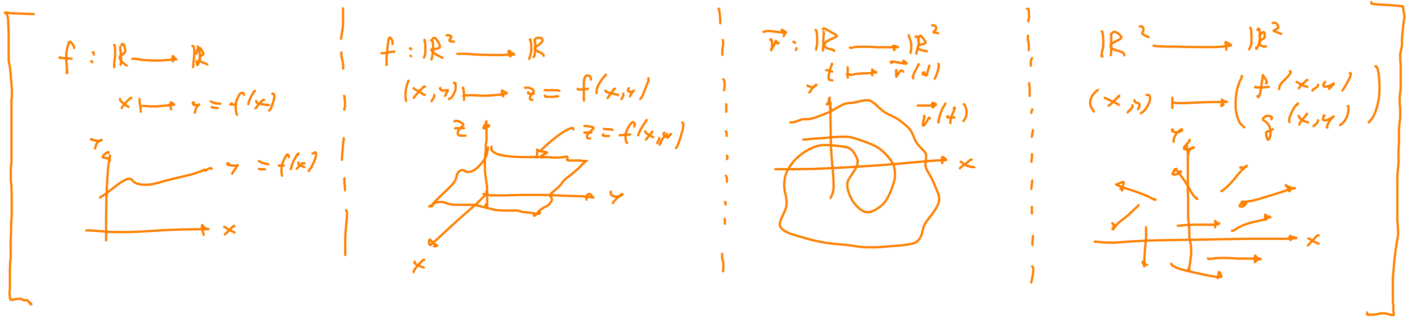
Allgemein heisst eine Zuordnung:

$$D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_0, y_0) \longmapsto \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

die jedem Pkt. in x-y-Ebene einen Vektor zuordnet ein <u>Vektorfeld</u>.

Bsp.:
- Kraftfeld
- Geschwindigkeitsvektorfeld
- E/B-Feld
- ...



Eigenschaften des Gradienten:

$$\left[\ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\varphi)\ \right]$$

(i) $D_{\vec{e}} f = \vec{e}\cdot\vec{\nabla} f$

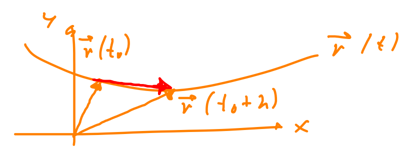
$= \underbrace{|\vec{e}|}_{=1}|\vec{\nabla} f|\cos(\varphi)$ Winkel zw. $\vec{e}$ & $\vec{\nabla} f$

$= |\vec{\nabla} f|\cos(\varphi)$

> Der maximale Wert von $D_{\vec{e}} f$ ist für $\vec{e}$ in die gleiche Richtung wie $\vec{\nabla} f$ und beträgt $|\vec{\nabla} f|$.

(ii) Sei $\vec{r}(t)$ eine Höhenlinie von $f(x,y)$

$\longrightarrow$ $f(\vec{r}(t)) = \text{konst.}$



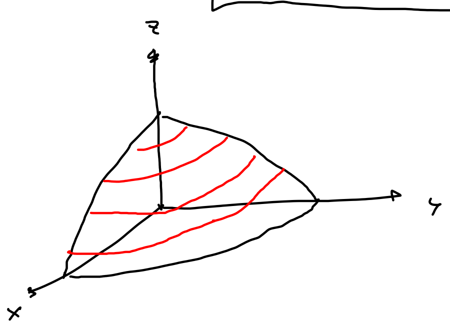
$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

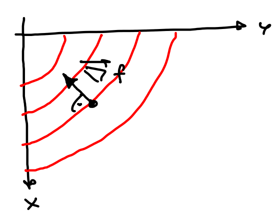
I.e. $\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{\nabla} f = 0$

tang. zu Höhenlinie

$\longrightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla} f \text{ senkrecht zu Höhenlinien } f(x,y) = \text{konst.}}$



Höhenlinien:



Aufgabe: Betrachten $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ im Pkt. $(1,1)$.
Man finde die Richtung in welcher $f(x,y)$

(i) am stärksten wächst,

(ii) —"— fällt,

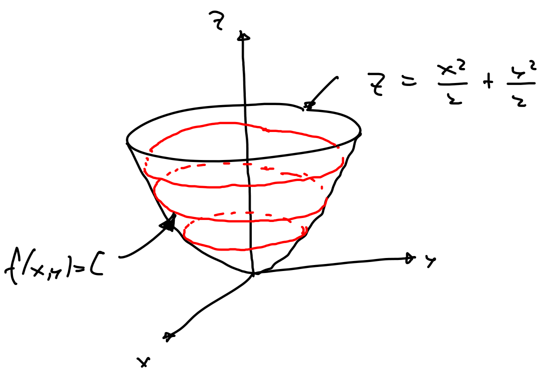
(iii) weder wächst noch fällt.

Lsg: (i) $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{\nabla} f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{e}_{(i)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\vec{e}_{(ii)} = -\vec{e}_{(i)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Orthogonal zu $\vec{e}_{(i)}$:

$$\vec{e}_{(iii)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{e}_{(iv)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Höhenlinien: