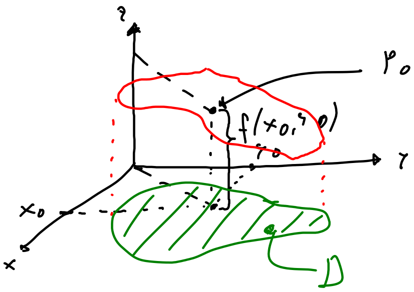
## Wiederholung:

**Fkt. von 2 Variablen**

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

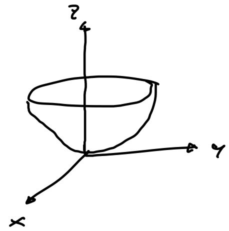
$(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$

$D \subset \mathbb{R}^2$

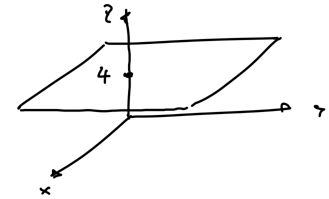



$p_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Bsp: $f(x,y) = x^2 + y^2$




$f(x,y) = 4$




**Fkt. von 3 Var.**

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longmapsto w = f(x,y,z)$

$D \subset \mathbb{R}^3$ (Teilmenge des 3dim. Raumes).

Bsp: $(x,y,z) \longmapsto T(x,y,z) =$ Temp. im Zimmer

Bsp:

| | | D | W |
|---|---|---|---|
| (i) | $w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ | $\mathbb{R}^3$ | $[0, \infty)$ |
| (ii) | $w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ | $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ | $(0, \infty)$ |
| (iii) | $w = xy\log(z)$ | $\{(x,y,z) \mid z > 0\}$ | $\mathbb{R}$ |

**Graphische Darstellung:**

Graph $\longrightarrow$ nicht möglich

Aber: **Niveauflächen:** (Analog zu Höhenlinien)

$$\boxed{f(x,y,z) = c}$$

Bsp: Niveauflächen von $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$f(x,y,z) = c$

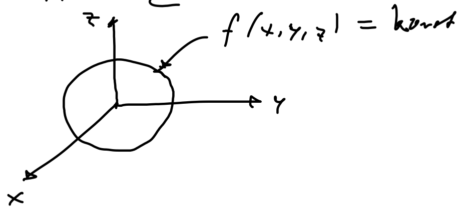
$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = c \longrightarrow \frac{1}{c} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\longrightarrow \frac{1}{c^2} = x^2+y^2+z^2$

wieder eine Konst.

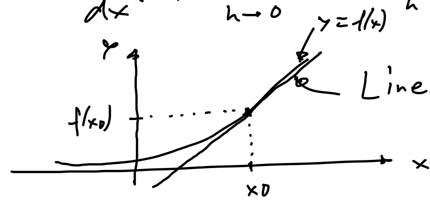
$$\frac{1}{c^2} = x^2 + y^2 + z^2$$

$\longrightarrow$ Kugeloberfläche mit $R = \frac{1}{c}$ am Ursprung




## Partielle Ableitung

Erinnerung: $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$ $\longrightarrow$ $\frac{df}{dx}(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$




Linearisierung mit Steig.: $m = \frac{df}{dx}(x_0)$

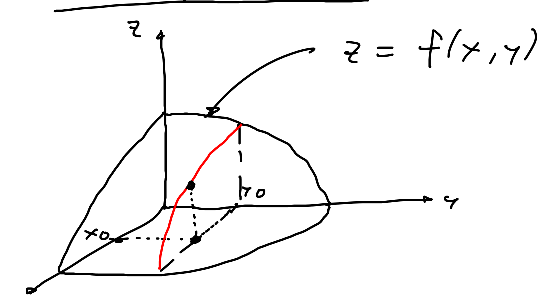
Für $f : D \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto z = f(x,y)$

**Def.:** Sei $f(x,y)$ Fkt., welche in Umgebung von $(x_0,y_0)$ (inklusive $(x_0,y_0)$) def. ist. Partielle Ableitung von $f(x,y)$ bezüglich der Variablen $x$ ist an der Stelle $(x_0,y_0)$:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}}$$

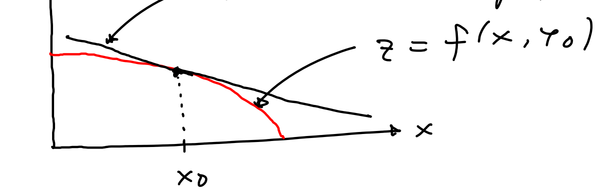
falls Grenzwert ex.

**Interpretation:**




Schnittkurve: $y = y_0$:

Gerade mit Steigung: $m = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$




Analog: $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}}$$

**Bem.:** Partielle Ableit. werden auf gewöhnliche Ableitungen zurückgeführt, indem man die Variable bezüglich welcher <u>nicht</u> abgeleitet wird als konst. betrachtet.

**Bsp.:** Sei $f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3xy + y - 1\right) = 2x + 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,-5) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = \underline{-7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,-5) = 3 \cdot 4 + 1 = \underline{13}$$

Alternative Notationen für $z = f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x} = f_x = \partial_x f = \partial_x z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$$ um anzudeuten dass $y$ konst.

**Aufgabe:** Man leite folgende Fkt. nach ihren Var. ab:

(i) $f(x,y) = -4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5$

(ii) $f(x,y) = x^2y^4 + e^x \cos(y) + 10x - 2y^2 + 3$

(iii) $f(x,y) = xy^2\left(\sin(x) + \sin(y)\right)$

(iv) $f(x,y) = \log(x + y^2)$

(v) $f(x,y,z) = 2x e^{yz} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(vi) $f(x,y,z) = \sin(x - y)\cos(z + 2y)$

(vii) $p(V,T) = \frac{RT}{V}$