Integration von rationalen Fkt.

Benötigen: Partialbruchzerlegung (PBZ)

Idee: $\underbrace{\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+1}}_{\text{können wir integrieren}} = \frac{3x+3+5x-10}{(x-2)(x+1)} \overset{(*)}{=} \frac{8x-7}{x^2-x-2}$

nicht klar wie integrieren!

Frage: Wie ist (*) umkehrbar?

Vorgehen: Bsp: $\frac{8x-7}{x^2-x-2}$

(i) Bruch echt gebrochen? $\longrightarrow$ ansonsten Polynomdiv.

$\frac{8x-7}{x^2-x-2}$ ist echt gebrochen. ✓

(ii) Nenner in Faktoren zerlegen: $x^2-x-2 \overset{!}{=} 0$

$\longrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\longrightarrow \left.\begin{array}{l} x_+ = 2 \\ x_- = -1 \end{array}\right\} \longrightarrow x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$

$$\longrightarrow \frac{8x-7}{x^2-x-2} = \frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}$$

(iii) Ansatz: $\boxed{\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}}$ $\quad / \cdot (x-2) / \cdot (x+1)$

$$8x-7 = A(x+1) + B(x-2)$$

(iv) "Gute" x-Werte einsetzen um Konst. zu bestimmen:

$x = -1 \longrightarrow -15 = -3B \longrightarrow \underline{B = 5}$

$x = 2 \longrightarrow 9 = 3A \longrightarrow \underline{A = 3}$

(v) Resultat: $\underline{\frac{8x-7}{x^2-x-2} = \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+1}}$

$$\longrightarrow \int \frac{8x-7}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{5}{x+1}\,dx$$

$$= \underline{3\log(x-2) + 5\log(x+1) + C}$$

Situation bei mehrfachen NS $\quad$ Bsp: $\frac{5x^2-31x+53}{x^3-9x^2+24x-16}$

(i) ✓

(ii) $x^3 - 9x^2 + 24x - 16 \overset{!}{=} 0 \longrightarrow x_1 = 1$

$x_2 = 4$ doppelt!

Alle Potenzen (im Zähler) treten auf, bis zur Ordnung der NS!

(iii) Ansatz:

$$\boxed{\frac{5x^2 - 31x + 53}{(x-1)(x-4)^2} = \frac{A}{x-1} + \underbrace{\frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}}} \quad / \cdot (x-1)(x-4)^2$$

$$\longrightarrow \quad 5x^2 - 31x + 53 = A(x-4)^2 + B(x-1)(x-4) + C(x-1)$$

(iv) Gute x-Werte:

$$x = 1 \longrightarrow 5 - 31 + 53 = 9A$$
$$27 = 9A \longrightarrow \underline{A = 3}$$

$$x = 4 \longrightarrow 9 = 3C \longrightarrow \underline{C = 3}$$

$$x = 0 \longrightarrow 53 = 16A + 4B - C$$
$$53 = 48 + 4B - 3$$
$$8 = 4B \longrightarrow \underline{B = 2}$$

(iv)* Alternative: Koeff.-Vergleich:

$$5x^2 - 31x + 53 = A(x-4)^2 + B(x-1)(x-4) + C(x-1)$$
$$= A(x^2 - 8x + 16) + B(x^2 - 5x + 4) + C(x-1)$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{Koeff. von } x^2: & 5 &= A + B \\ \text{— " — } x^1: & -31 &= -8A - 5B + C \\ \text{— " — } x^0: & 53 &= 16A + 4B - C \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 3 \end{array}$$

(v) $$\frac{5x^2 - 31x + 53}{x^3 - 9x^2 + 24x - 16} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-4} + \frac{3}{(x-4)^2}$$

Objekte dieser Form: Partialbrüche

Aufgabe: PBZ von $\dfrac{x}{x^2 - 1}$

Lösg.: (i) ✓

(ii) $x^2 - 1 \overset{?}{=} 0 \longrightarrow x_1 = 1$

$x_2 = -1$

(iii) $$\frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$\longrightarrow \quad x = A(x-1) + B(x+1)$$

(iv) $x = 1 \longrightarrow 1 = 2B \longrightarrow \underline{B = \frac{1}{2}}$

$x = -1 \longrightarrow -1 = -2A \longrightarrow \underline{A = \frac{1}{2}}$

(v) $$\underline{\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}}$$

Aufgabe: Ges: Ansatz für $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \ldots$

Lösg.: $$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x-2}$$

Aufgabe: $$\int \frac{2x^3-14x^2+14x+30}{x^2-4}\,dx$$

Lösg.: (i)

$$(2x^3-14x^2+14x+30):(x^2-4) = 2x-14+\frac{22x-26}{x^2-4}$$
$$\underline{-(2x^3-8x)}$$
$$-14x^2+22x+30$$
$$\underline{-(-14x^2+56)}$$
$$22x-26 \leftarrow \text{Rest}$$

(ii) $\frac{22x-26}{x^2-4}$ → in Lin.-Fakt.: $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2$

$$\rightarrow \frac{22x-26}{x^2-4} = \frac{22x-26}{(x+2)(x-2)}$$

(iii) $$\frac{22x-26}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2} \quad \Big/ \cdot (x-2)(x+2)$$

$$\rightarrow 22x-26 = A(x+2)+B(x-2)$$

(iv)
$$x=2 \rightarrow 44-26 = 4A \rightarrow \underline{A} = \frac{18}{4} = \underline{\frac{9}{2}}$$
$$x=-2 \rightarrow -44-26 = -4B \rightarrow \underline{B} = \frac{70}{4} = \underline{\frac{35}{2}}$$

(v) $$\rightarrow \underline{\frac{22x-26}{x^2-4} = \frac{9}{2(x-2)}+\frac{35}{2(x+2)}}$$

$$\rightarrow \int \frac{2x^3-14x^2+14x+30}{x^2-4}\,dx = \int\left(2x-14+\frac{9}{2(x-2)}+\frac{35}{2(x+2)}\right)dx$$

$$= \underline{x^2-14x+\frac{9}{2}\log(x-2)+\frac{35}{2}\log(x+2)+C}$$