Biegen von Balken

Es gilt: $\boxed{EI\,\frac{d^2y}{dx^2}(x) = M(x)}$ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{M(x)}{EI} \right)$

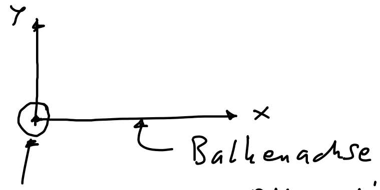
wobei: E : E-Modul

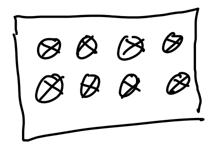
I : Flächenmoment 2. Ordnung (eigentlich: $I_y = \iint_A z^2\,dy\,dz$, siehe später)

$y(x)$: Auslenkung

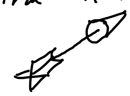
$M(x)$: Moment (zeigt in z-Richtung, somit Skalar)

Benutzen Koordinaten x, y, z:

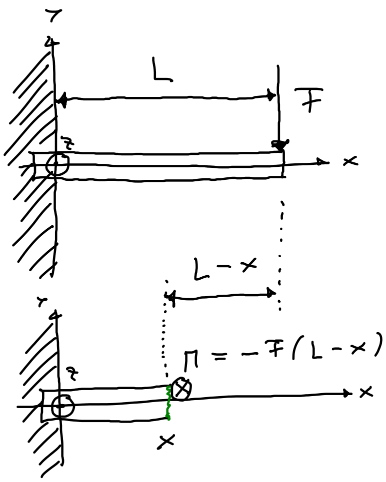




z-Achse aus Bildschirm heraus ⊙ ⊗



Bsp:



I.e. $M(x) = -F(L-x)$

"Fest eingespannt" $\longrightarrow$ $y(0) = 0$

$\frac{dy}{dx}(0) = 0$

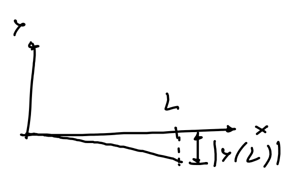
Somit haben wir das Problem:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}(x) = -\frac{F}{EI}(L-x) = \frac{F}{EI}(x-L) \\ \frac{dy}{dx}(0) = 0 & (i) \\ y(0) = 0 & (ii) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + \underset{\overset{\parallel}{0}}{C_1} \leftarrow (i)$$

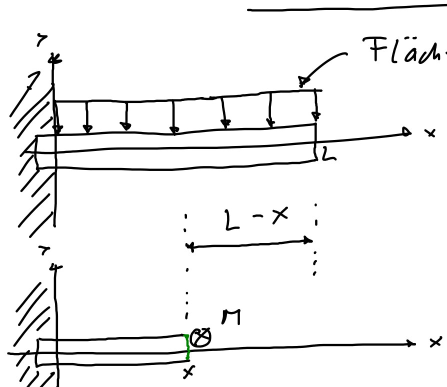
$$y(x) = \frac{F}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2}\right) + \underset{\overset{\parallel}{0}}{C_2} \leftarrow (ii)$$

I.e. $\underline{y(x) = \frac{F}{6EI}\left(x^3 - 3Lx^2\right)}$



$y(L) = \ldots$

Bsp:



Kraft pro Längeneinheit = q

$$M(x) = -\underbrace{(L-x)q}_{\text{Kraft}}\ \underbrace{\frac{L-x}{2}}_{\text{Hebelarm}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}(x) = -\dfrac{q}{2EI}\left(L^2 - 2Lx + x^2\right) \\ y(0) = 0 \\ \dfrac{dy}{dx}(0) = 0 \end{cases}$$

<u>Aufgabe:</u> Ges: $y(x)$.

<u>Lösg:</u>

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{q}{2EI}\left(L^2x - Lx^2 + \frac{x^3}{3}\right) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{C_1}}$$

$$y(x) = -\frac{q}{2EI}\left(\frac{L^2x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{C_2}}$$

I.e. $\underline{y(x) = -\dfrac{q}{24EI}\left(6L^2x^2 - 4Lx^3 + x^4\right)}$

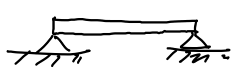
<u>Aufgabe:</u> Man berechne Fläche zw. den Graphen von

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x$$
$$g(x) = -x^2 + 3x$$

<u>Aufgabe:</u> $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $g(x) = \dfrac{x}{4}$

Fläche zw. $f(x)$ & $g(x)$ im 1. Quadranten wird um y-Achse rotiert. Wie gross ist das entstandene Volumen?

<u>Aufgabe:</u> Balken mit Länge L & Masse m auf beiden Seiten aufgelegt:



Man verwende (oder zeige) $M(x) = \dfrac{mg}{2L}\left(Lx - x^2\right)$ und finde $y(x)$.