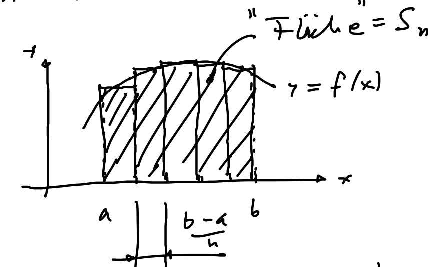
Wiederholung: (i) **Stammfkt:** $F(x)$ ist Stammfkt. von $f(x)$, falls $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$.

(ii) **Bestimmtes Integral:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$



(iii) **Fundamentalsatz** (Zusammenhang zw. (i) & (ii))

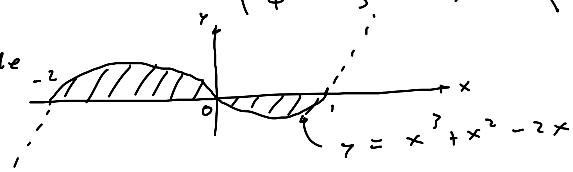
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(So werden Integrale berechnet)

Aufgabe: (i) $\int_{-2}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{-2}^{1}$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4\right) = \dots = \frac{9}{4}$$

(ii) Fläche



$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x)dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{-2}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_0^1$$

$$= 0 - \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4\right) - \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - 0\right) = \dots = \frac{37}{12}$$

Unbestimmtes Integral (eine Notation)

Das **unbestimmte Integral** $\int f(x)dx$ einer Fkt. $f(x)$ ist die Menge aller Stammfkt. Bsp.: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Bemerkungen: (i) Auffinden einer Stammfkt. ist schwieriger als ableiten, weil keine allg. Formeln für Produkte oder zusammengesetzte Fkt. existieren.

(ii) Stammfkt. muss keine Elementarfkt. sein.

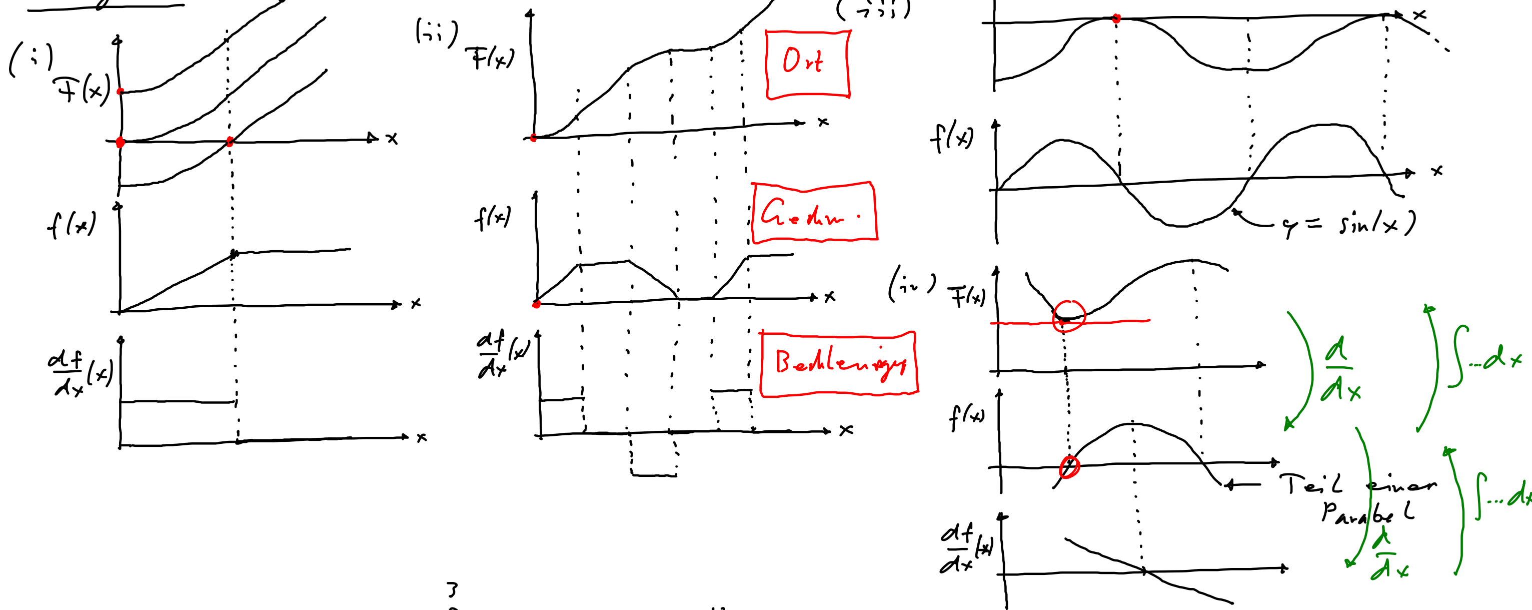
Bsp: $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$

(iii) Heutzutage: Integrale mit Computer (Maple, Mathematica, Matlab, ...)

Mathematica: symbolisch

Matlab: numerisch

Aufgabe: (grafisch ableiten)



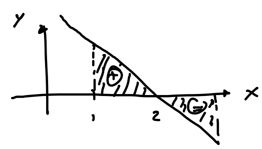
Aufgabe: Man bestimme $\int_1^3 (-x+2)\,dx$ mit:

(i) geometrischen Methoden (i.e. aus bekannten Flächen)

(ii) Fundamentalsatz

(iii) Def. Integrals als $\lim_{n\to\infty} S_n$ indem man Untersummen verwendet.
$\left(\text{Hinweis: } \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\right)$

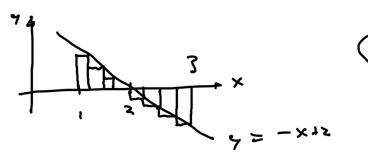
Lösg: (i)



$\longrightarrow \int_1^3 (-x+2)\,dx = 0$

(ii) $\int_1^3 (-x+2)\,dx = \left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_1^3 = \left(-\frac{9}{2}+6\right) - \left(-\frac{1}{2}+2\right) = 0$

(iii)



$\xi_i = 1 + i\,\frac{3-1}{n}$

$i = 1,2,3,4,\dots,n$

$a=1$, $b=3$ $\longrightarrow$ $\frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

Kontrolle: $\xi_1 = 1 + 1\cdot\frac{3-1}{n} = 1+\frac{2}{n}$

$\xi_n = 1 + n\,\frac{3-1}{n} = 3$

ξ's: am rechten Rand!

$$\longrightarrow S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+i\frac{2}{n}\right) \underset{f(x)=-x+2}{=} \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-1-i\frac{2}{n}+2\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-i\frac{2}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n} - \frac{4}{n^2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{=\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= 2 - \frac{4n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} 2-2 = 0.$$