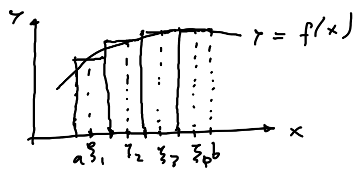
Wiederholung

Stammfkt.: $F(x)$ ist Stammfkt. von $f(x)$, falls $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$.

Bestimmtes Integral:

- Idee: Fläche unter Kurve



Approx. mit Rechtecken:

Fläche $= S_n$

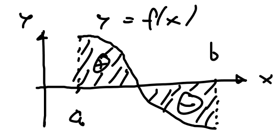
$$= \frac{b-a}{n}\left(f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)\right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

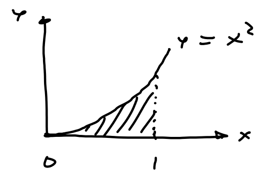
Riemannsche Summe

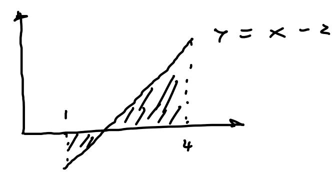
- **Def:** $$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

- Flächeninterpretation: ⚠ Vorzeichen:



- Bsp:





$$\int_0^1 x^2 dx \underset{\lim_{n\to\infty} S_n}{=} \frac{1}{3}$$

$$\int_1^4 (x-2)dx \underset{\text{mit Flächeninterpret.}}{=} \frac{3}{2}$$

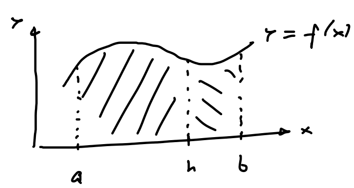
Eigenschaften des bestimmten Integrals

(i) $$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(ii) $$\int_a^b \underset{\in\mathbb{R},\ \text{konst.}}{\lambda} f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

((i) & (ii) $\longrightarrow$ $\int_{\dots}^{\dots}$ ist lineare Operation)

(iii) $$\int_a^b f(x)dx \underset{a<h<b}{=} \int_a^h f(x)dx + \int_h^b f(x)dx$$

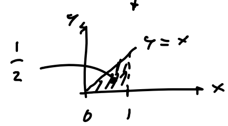


(iv) $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

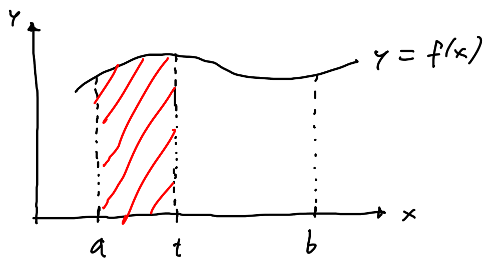
(v) **Def:** Sei $a < b$. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

(Def. macht Sinn, da Breite der Rechtecke in S_n durch $\frac{b-a}{n}$ gegeben, wird zu $\frac{a-b}{n} = -\frac{b-a}{n}$.)

Bsp: $\int_0^1 (x+x^2)\,dx = \underbrace{\int_0^1 x\,dx}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_0^1 x^2\,dx}_{=\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$



Fundamentalsatz der Diff.- & Integralrechnung



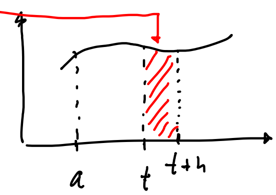
Wir betrachten: $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$

"Integral als Fkt. der oberen Grenze".

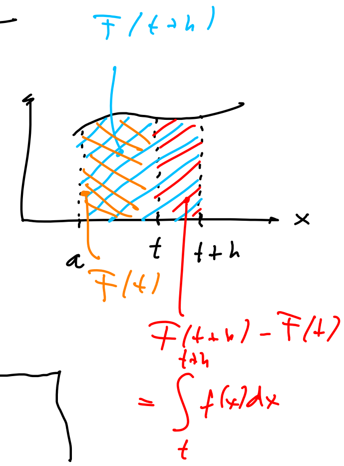
? Was ist $\frac{dF}{dt}(t)$?

Leiten ab mit Def.:

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\boxed{F(t+h) - F(t)}}{h}$$



$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_t^{t+h} f(x)\,dx}{h}$$



$$F(t+h) - F(t) = \int_a^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^t f(x)\,dx$$

(mit Eigenschaft (iii))

$$= \cancel{\int_a^t f(x)\,dx} + \int_t^{t+h} f(x)\,dx - \cancel{\int_a^t f(x)\,dx}$$

Wir haben:

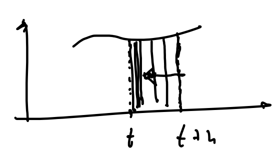
$$m_h \cdot h \le \int_t^{t+h} f(x)\,dx \le M_h \cdot h \qquad (*)$$

m_h: Min. von $f(x)$ in $[t, t+h]$

M_h: Max. der Fkt. $f(x)$ im Intervall $[t, t+h]$

Wir haben:

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(t) \qquad (**)$$



$(*), (**) \longrightarrow$

$$m_h \le \frac{\int_t^{t+h} f(x)\,dx}{h} \le M_h$$

$m_h \xrightarrow{h\to 0} f(t)$, $\quad M_h \xrightarrow{h\to 0} f(t)$

$$\longrightarrow \quad \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\int_t^{t+h} f(x)\,dx}{h}} = f(t)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{dF}{dt}(t)$$

I.e.: $\boxed{\boxed{\frac{dF}{dt}(t) = f(t)}}$ <u>Also ist $F(t)$</u> <u>Stammfkt. von $f(t)$!</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) \underset{\substack{\uparrow \\ F(a)=0}}{=} F(b) - F(a)$$

Sei G eine andere Stammfkt. von $f \longrightarrow G(x) = F(x) + C$

$$\longrightarrow \underline{\int_a^b f(x)\,dx} = F(b) - F(a)$$

$$= G(b) - C - \big(G(a) - C\big) = \underline{G(b) - G(a)}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a), \text{ wobei } G(x) \text{ eine beliebige Stammfkt. von } f(x) \text{ ist.}}$

Notation:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

<u>Bsp.:</u> $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ (wissen wir aus Bsp.)

(↳ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$)

Mit Fundamentalsatz: (viel einfacher)

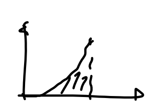
Zuerst: Was ist Stammfkt. von $f(x) = x^2$:

$$f(x) = x^2 \longrightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

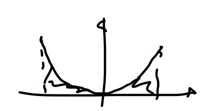
können beliebige Stammfkt. verwenden,

wählen die mit $C = 0$.

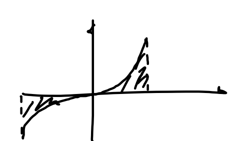
Somit: $\underline{\int_0^1 x^2\,dx} = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \underline{\frac{1}{3}}$



<u>Bsp:</u> $\int_{-1}^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$



$\int_{-1}^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$



Bsp.: $\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

$$\int_3^7 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_3^7 = \frac{49}{2} - \frac{9}{2} = 20$$

$$\int_2^4 6x^5\,dx = x^6\Big|_2^4 = 4^6 - 2^6 = \dots$$

Fundamentalsatz der Diff.- & Integralrechnung

Sei f eine stetige Fkt., def. auf $[a,b]$.

(i) $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ mit $a \le t \le b$ ist

diff.-bar und es gilt:

$\frac{dF}{dt}(t) = f(t)$,

i.e. $F(t)$ ist Stammfkt. von $f(t)$.

(ii) Falls $F(x)$ beliebige Stammfkt.

von $f(x)$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Aufgabe: (i) $\int_{-2}^1 (x^3 + x^2 - 2x)\,dx$

(ii) Fläche zwischen x-Achse & $y = x^3 + x^2 - 2x$