Integralrechnung

Wiederholung:

Stammfkt. $F(x)$ ist Stammfkt. von $f(x)$, falls:

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x).$$

Bsp.: $G(t) = -\frac{1}{t} + 4$ ist Stammfkt. von $g(t) = \frac{1}{t^2}$, weil $\frac{dG}{dt}(t) = g(t)$.

Stammfkt. nur bis auf Konst. bestimmt.

Bsp: Menge aller Stammfkt. von $h(k) = 2k + 1$ ist

$$H(k) = k^2 + k + C \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R}.)$$

Anwendung Kinematik:

Wir wissen: $v(t) = \frac{ds}{dt}(t)$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}(t)$$

Bsp: Körper habe zur Zeit $t = 0$ Geschw. $v_0 = v(0)$ und Position $s_0 = s(0)$. Es sei $a(t) = a =$ konst.

Ges: $s(t)$.

$a(t) = a \longrightarrow v(t) = at + C_1$

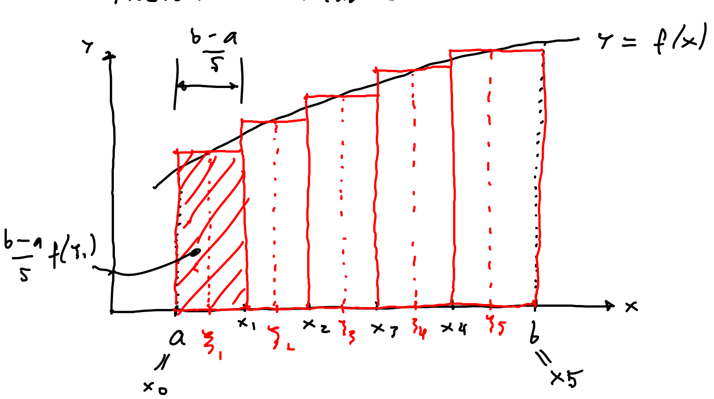
mit $v(0) = v_0 \longrightarrow \underline{v(t) = at + v_0}$

$\longrightarrow s(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C_2$

mit $s(0) = s_0 \longrightarrow \underline{s(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0}$

Bestimmtes Integral

Problem: Fläche unter Kurve



Idee: Fläche durch Summe von Rechtecken approx.

$$\text{Fläche} = \frac{b-a}{5}\left(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_5) \right)$$

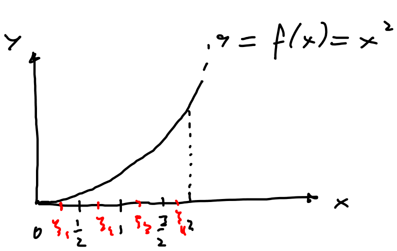
Allg. Formel mit n Rechtecken:

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n) \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \quad \underline{\text{Riemannsche Summe}}$$

Bem: S_n auch def. für $f \leq 0$ (Interpretation siehe später).

Bsp:



$$\left.\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 2 \\ n = 4 \end{array}\right\} \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$$

$\xi_1 = \frac{1}{4}$; $\xi_2 = \frac{3}{4}$; $\xi_3 = \frac{5}{4}$; $\xi_4 = \frac{7}{4}$

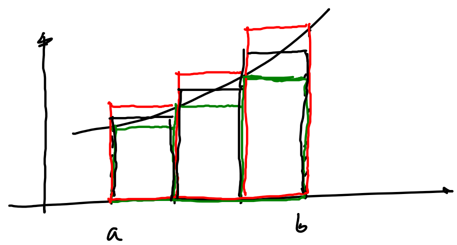
$\longrightarrow S_4 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2\right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + 9 + 25 + 49}{16} = \frac{84}{32} = \underline{2.625}$

Viele Möglichkeiten die ξ's zu wählen.

Bsp: (i) So wählen dass Summe maximal: $\overline{S}_n$

(ii) ——— " ——— minimal: $\underline{S}_n$



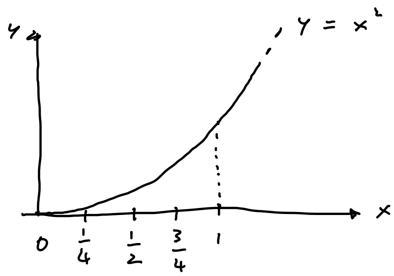
Es gilt: $\boxed{\underline{S}_n} \le S_n \le \boxed{\overline{S}_n}$

Untersumme — beliebige Wahl der ξ's — Obersumme

Es gilt aber auch:

$\boxed{\underline{S}_n \le \text{Fläche unter Kurve} \le \overline{S}_n}$

Aufgabe:



Ges: (i) $\overline{S}_4$

(ii) $\underline{S}_4$

Lösg: (i) $\overline{S}_4 = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2\right) = \dots = \frac{15}{32}$

(ii) $\underline{S}_4 = \frac{1}{4}\left(0^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \dots = \frac{7}{32}$.

Wir sehen: $\overline{S}_4 \overset{!}{=} \underline{S}_4 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \underline{S}_4 + \frac{1}{4}$

Oder: $\overline{S}_4 - \underline{S}_4 = \frac{1}{4}$

In n Abschnitte unterteilt: $\overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Weil: $\underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n \longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \underline{S}_n = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \overline{S}_n$

Somit: $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ existiert und ist unabhängig von der Wahl der ξ's.

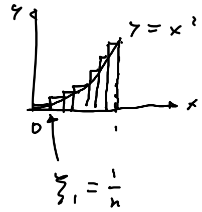
Def. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} S_n$: Bestimmtes Integral von $f(x)$ auf Intervall $[a, b]$

Riemannsche Summe:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

Bsp: $f(x) = x^2$; $a = 0$; $b = 1$; Ges: $\int_0^1 f(x)\,dx$

Benutzen Obersummen:



$$\overline{S}_n = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$$

Formelbuch

$$= \frac{1}{6}\,\frac{n}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(2n+1)}{n} = \underbrace{\frac{1}{6}}_{=\frac{1}{6}}\, 1\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(2+\frac{1}{n}\right)}_{\to 2}$$

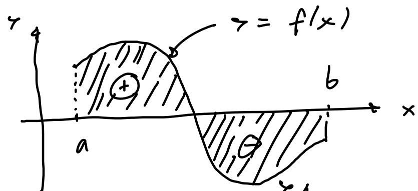
$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

I.e. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

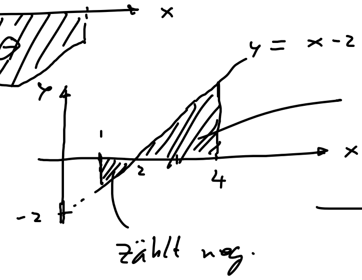
Wichtige Bemerkung: Falls $f \leq 0$ $\longrightarrow$ Negative Anteile in S_n.

$\longrightarrow$ Flächen unter x-Achse besitzen neg. Vorzeichen.

Somit: Geometrische Interpretation von $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen $y = f(x)$, wobei Flächen unter der x-Achse neg. gezählt werden.



Bsp: $\displaystyle\int_1^4 (x-2)\,dx$



$$\longrightarrow \int_1^4 (x-2)\,dx = -\ \ + \ \ = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$