Analysis 2

Allgemeines:

- Begrüssung
- Website
- Inhalt:
  - Integralrechnung in <u>einer</u> Variable
  - Fkt. von mehreren Variablen
    - ↳ allgemein
    - ↳ Diff.-Rechnung
    - ↳ Int.-Rechnung
- Kein Unterricht <u>diesen</u> Donnerstag.
- Automobil / Wing ⟶ Roger Filliger
  - ↳ ?

Integralrechnung

Motivation (physikalisch)

Sei $f(t)$ Position eines Körpers zur Zeit t.

$\longrightarrow \frac{df}{dt}(t) = v(t)$ ist Geschw.

wieder Fkt.

$\frac{d^2f}{dt^2}(t) = a(t)$ ist Beschl.

$$\boxed{\text{Müssen in der Lage sein aus } a(t),\ v(t)\ \&\ f(t) \text{ zu bestimmen!}}$$

Da meist wohldefinierte Kräfte wirken, i.e. man kennt $F(t)$.

Mit (Newton): $F = ma \longrightarrow a(t) = \frac{1}{m} F(t)$

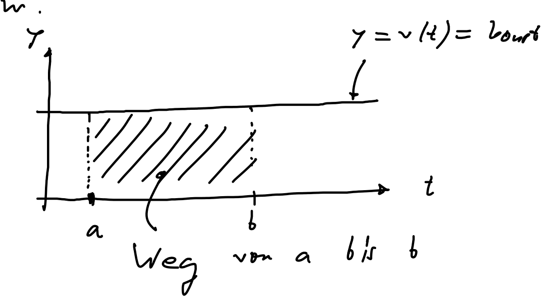
$\longrightarrow \ldots \longrightarrow s(t)$

↳ Auffinden einer $\boxed{\text{Stammfunktion}}$

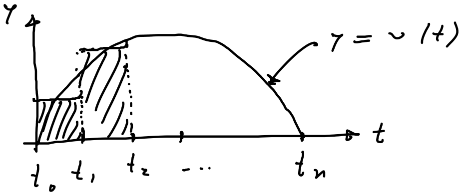
Geometrischer Zusammenhang

Bsp: Körper bewegt sich mit konst. Geschw.

$\longrightarrow$ "<u>Weg = Geschw. · Zeit</u>"



Betrachten Situation in welcher Geschw. nicht konst. ist:



Idee: Approximieren in Intervallen: $[t_i, t_{i+1}]$

nehmen in Intervallen Geschw. als konst. an $\longrightarrow$ $\underbrace{\text{Weg} = \text{Geschw.} \cdot \text{Zeit}}_{\text{nur für ein Intervall}}$

Je kleiner die Intervalle, desto besser die Approx.

Und: Totale Positionsdiff. entspricht der Fläche unter der Kurve $y = v(t)$.

$\hookrightarrow$ Dies ist das $\boxed{\text{bestimmte Integral}}$ von $v(t)$.

Stammfunktion

Def.: $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$, falls gilt:

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x).$$

Notation: Funktion: Kleinbuchstaben
Stammfkt.: Grossbuchstaben

Bsp.:

(i) $f(x) = x \longrightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$ $\left(\text{weil: } \frac{dF}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x\right)$

(ii) $f(x) = \cos(x) \longrightarrow F(x) = \sin(x)$

(iii) $m(n) = e^n \longrightarrow M(n) = e^n$

Linearität: Seien $F(x)$, $G(x)$ Stammfkt. von $f(x)$, $g(x)$

$\longrightarrow$ (i) $F(x) + G(x)$ ist Stammfkt. von $f(x) + g(x)$.

(ii) $\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}\ (\text{konst.})}}{\lambda} F(x)$ ist Stammfkt. von $\lambda f(x)$.

Bsp.: Sei $f(x) = 8x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

$\longrightarrow$ Stammfkt.: $\underline{F(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x}$

Bemerkung: Stammfkt. nicht eindeutig!

Bsp.: $F_1(x) = \sin(x) + 17$
$F_2(x) = \sin(x)$
sind Stammfkt. von $f(x) = \cos(x)$

weil: $\frac{dF_1}{dx}(x) = \frac{dF_2}{dx}(x) = f(x)$

I.e. Stammfkt. nur bis auf additive Konst. bestimmt! |||

I.e. Falls $F(x)$ Stammfkt. von $f(x)$

$\longrightarrow$ $F(x) + C$ —— " —— .

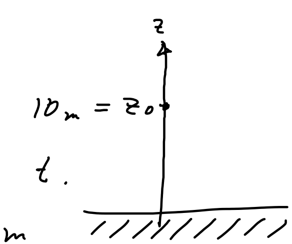
<u>Bsp:</u> Die Menge aller Stammfkt. von $f(x) = x^2$ ist gegeben durch $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

<u>Aufgabe:</u> Man finde die Menge aller Stammfkt. zu

	$f(x) =$	$F(x) =$
(i)	4	$4x + C$
(ii)	$4x$	$2x^2 + C$
(iii)	$2x + 7$	$x^2 + 7x + C$
(iv)	$\frac{1}{2x}$	$\frac{1}{2}\log(x) + C$
(v)	$8x^7$	$x^8 + C$
(vi)	e^{4x}	$\frac{1}{4}e^{4x} + C$
(vii)	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
(viii)	$-\cos(x) + \sin(x)$	$-\sin(x) - \cos(x) + C$
(ix)	$\cos(2x)$	$\frac{1}{2}\sin(2x) + C$

<u>Bemerkung:</u> In Anwendungen wird die Konst. C (meist) durch zusätzliche Bedingungen fixiert.

<u>Anwendung:</u> Masse m wird zur Zeit $t = 0$ aus Höhe $z_0 = 10\,m$ mit $v_0 = -2\,m/s$ (nach unten) geworfen (eindimensionales Problem).



Ges: Höhe z in Abhängigkeit der Zeit t.

Annahme: Beschleunigung $= a(t) = g = -10\,\frac{m}{s^2}$.

<u>Lösg.</u> (ohne Einheiten)

$a(t) = -10$

$\longrightarrow v(t) = A(t) = -10t + C_1$

Aber: $v(0) = -10 \cdot 0 + C_1 = \underline{C_1} \overset{!}{=} v_0 = \underline{-2}$

$\longrightarrow \underline{v(t) = -10t - 2}$

$\longrightarrow z(t) = -\frac{10t^2}{2} - 2t + C_2 = -5t^2 - 2t + C_2$

Aber: $z(0) = C_2 \overset{!}{=} 10 \longrightarrow \underline{C_2 = 10}$

$\longrightarrow \underline{\underline{z(t) = -5t^2 - 2t + 10}}$