**PRÜFUNG ANALYSIS 2**
**28. MAI 2019**
**MUSTERLÖSUNG**

**Punkteverteilung.**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 4 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | 20 |

**Aufgabe 1.** Für die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{xy}$$

(i) bestimme und skizziere man den Definitionsbereich,
(ii) bestimme man den Wertebereich,
(iii) skizziere man Höhenlinien
(iv) und bestimme man eine Kurve $\overrightarrow{r}(t)$, welche die Höhenlinie durch den Punkt $(x_0, y_0) = (4,1)$ beschreibt.

**Lösung.**

(i) Die Wurzel ist nur für Argumente grösser oder gleich Null definiert, i.e. der Definitionsbereich ist

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}.$$

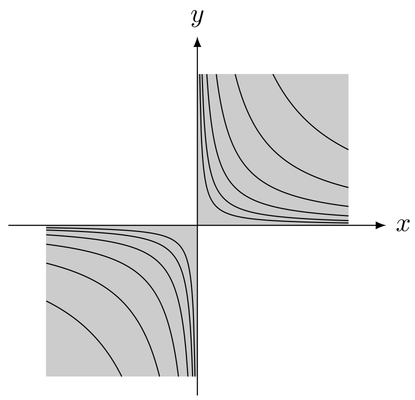
für eine Skizze siehe grauer Bereich in Figur.

(ii) Der Wertebereich entspricht dem Wertebereich der Wurzel, i.e. $W = [0, \infty)$.

(iii) Höhenlinien sind gegeben durch $f(x,y) = C$ für eine Konstante $C \geq 0$. I.e. $\sqrt{xy} = C$. Quadrieren ergibt $xy = C$ für eine neue Konstante $C \geq 0$. $C = 0$ führt auf die Koordinatenachsen. Für $C > 0$ sind die Höhenlinien gegeben durch $y = C/x$ mit $C > 0$, $x \neq 0$. Für eine Skizze siehe Figur.

(iv) Wir haben $f(x_0, y_0) = \sqrt{4 \cdot 1} = 2$. Die Höhenlinie durch den Punkt $(x_0, y_0) = (4,1)$ ist somit gegeben durch $f(x,y) = 2$. Daraus folgt $xy = 4$, i.e. $y = 4/x$. Eine mögliche Kurve ist somit

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4/t \end{pmatrix}, \quad t \in (0, \infty).$$




**Aufgabe 2.**

(i) Man finde eine Gleichung der Ellipse, welche in der $x$-$y$-Ebene liegt und durch die folgenden vier Punkte verläuft:

$$(\pm\sqrt{2}, 0), \qquad (0, \pm\sqrt{6}).$$

(ii) Man finde die Maxima und Minima der Funktion

$$f(x,y) = xy$$

auf obiger Ellipse.

**Lösung.**

(i) Die allgemeine Form der Ellipsengleichung ist

$$ax^2 + by^2 = 1.$$

Die Punkte $(\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{6})$ eingesetzt ergeben $a = 1/2$, $b = 1/6$, i.e. die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

(ii) Wir schreiben die Ellipsengleichung als

$$3x^2 + y^2 = 6.$$

Wir suchen somit das Maximum der Funktion $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $3x^2 + y^2 = 6$. Diese Nebenbedingung formulieren wir als $g(x, y) = 0$, wobei $g(x, y) = 3x^2 + y^2 - 6$. Die Lagrangegleichungen $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$, $g = 0$ sind

$$\begin{aligned} y &= 6\lambda x, \\ x &= 2\lambda y, \\ 6 &= 3x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Die erste in der zweiten Gleichung eingesetzt ergibt

$$y = 12\lambda^2 y.$$

$y = 0$ ist nicht möglich, da sonst aus der zweiten Gleichung $x = 0$ folgen würde und $x = y = 0$ wiederspricht der dritten Gleichung. Somit folgt $\lambda^2 = 1/12$. Die erste Gleichung in der dritten eingesetzt ergibt

$$6 = 3x^2 + 36\lambda^2 x^2.$$

Dies mit $\lambda^2 = 1/12$ ergibt $6 = 6x^2$, woraus folgt dass $x = \pm 1$. Daraus folgt wiederum durch die dritte Gleichung, dass $y = \pm\sqrt{3}$. Wir finden somit die vier Punkte

$$(1, \sqrt{3}), \qquad (-1, -\sqrt{3}), \qquad (1, -\sqrt{3}), \qquad (-1, \sqrt{3}).$$

Wir haben die Maxima und Minima

$$f(1, \sqrt{3}) = f(-1, -\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \qquad f(1, -\sqrt{3}) = f(-1, \sqrt{3}) = -\sqrt{3}.$$

**Aufgabe 3.** Man bestimme die folgenden Integrale und skizziere jeweils das Integrationsgebiet:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\,dxdy,$

(ii) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin(\pi xy)\,dydx,$

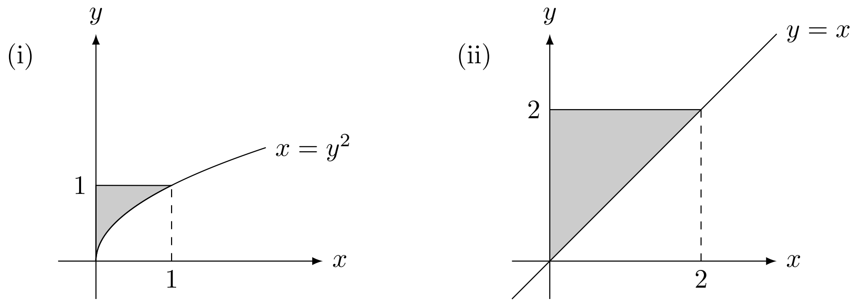
**Lösung.**

(i) Wir haben

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\,dxdy = \int_0^1 3y^2 e^{xy}\Big|_0^{y^2} dy = \int_0^1 3y^2(e^{y^3} - 1)dy = (e^{y^3} - y^3)\Big|_0^1 = e - 2.$$

(ii) Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge. Wir haben

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin(\pi xy)\,dydx &= \int_0^2 \int_0^y 2y^2 \sin(\pi xy)\,dxdy \\ &= \int_0^2 -\frac{2y}{\pi}\cos(\pi xy)\Big|_0^y dy \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{2y}{\pi}\cos(\pi y^2) + \frac{2y}{\pi}\right) dy = \left(-\frac{\sin(\pi y^2)}{\pi^2} + \frac{y^2}{\pi}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$




**Aufgabe 4.** Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = e^x \sqrt{y}.$$

Man finde eine Abschätzung von $f(0.01, 24.8)$. Hinweis: Man linearisiere die Funktion $f(x, y)$ an einem geeigneten Punkt $(x_0, y_0)$.

**Lösung.** Wir linearisieren am Punkt $(x_0, y_0) = (0, 25)$. Wir haben $f(x_0, y_0) = e^0\sqrt{25} = 5$. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \sqrt{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{e^x}{2\sqrt{y}}.$$

Ausgewertet bei $(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 25) = e^0\sqrt{25} = 5, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 25) = \frac{e^0}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}.$$

Die Linearisierung

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

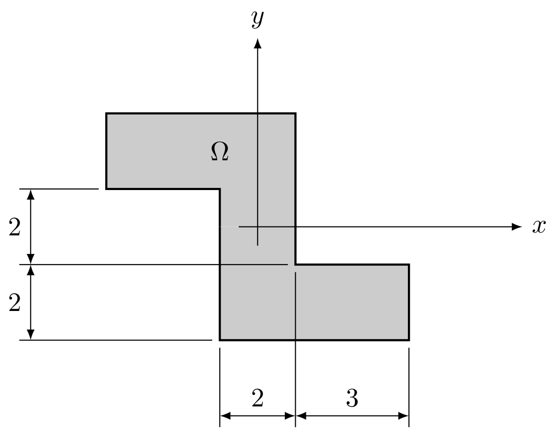
mit den oben berechneten Grössen ist

$$f(0.01, 24.8) \approx 5 + 5(0.01 - 0) + \frac{1}{10}(24.8 - 25) = 5 + 0.05 - 0.02 = 5.03.$$

**Aufgabe 5.** Man bestimme das Flächenmoment

$$I_x = \iint_\Omega y^2 dA,$$

für den untenstehenden Querschnitt $\Omega$:




Hinweise:

(i) Der Querschnitt $\Omega$ ist rotationssymmetrisch (Rotation um den Ursprung) mit einem Rotationswinkel von $\pi$.

(ii) Satz von Steiner: Bezeichnet $I_x$ das Flächenmoment eines Querschnitts $\Omega$ bezüglich dem $x$-$y$-Koordinatensystem, so ist

$$I_{xs} = I_x - y_s^2|\Omega|,$$

das Flächenmoment bezüglich einem Koordinatensystem, welches parallel zum $x$-$y$-Koordinatensystem und durch den Schwerpunkt des betrachteten Querschnitts verläuft.

Die Schwerpunktskoordinaten werden mit $(x_s, y_s)$ bezeichnet und $|\Omega|$ bezeichnet die Querschnittsfläche.

(iii) Für $\Omega = [-b/2, b/2] \times [-h/2, h/2]$ gilt $I_x = bh^3/12$.

**Lösung.** Wir berechne das $I_{xs}$ von einem Rechteck der Breite 5 und Höhe 2, korrigieren diesen Wert mit dem Satz von Steiner und multiplizieren mit 2 da der Querschnitt 2 solche Rechtecke beinhaltet (oben links und unten rechts). Der erhaltene Ausdruck (ohne den Faktor 2) steht in der untenstehenden Gleichung in der Klammer (davor der erwähnte Faktor 2). Was dann noch fehlt ist das Quadrat in der Mitte. Bei diesem Quadrat gilt $I_x = I_{xs} = 2 \cdot 2^3/12$. Dieser Term steht nach der Klammer in der untenstehenden Gleichung. Zusammen haben wir

$$I_x = \iint_\Omega y^2 dA = 2\left(\frac{5 \cdot 2^3}{12} + 2 \cdot 5 \cdot 2^2\right) + \frac{2 \cdot 2^3}{12} = 88.$$

**Aufgabe 6.** Wir betrachten ein zylindrisches Glas mit Durchmesser $d$ und Höhe $H$. In den folgenden Teilaufgaben sollen alle gefragten Volumen mit Hilfe eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten berechnet werden. Man beachte den Hinweis am Ende der Aufgabenstellung.

(i) Das Glas sei voll. Man berechne das Volumen der enthaltenen Flüssigkeit.

(ii) Das Glas wird so weit abgekippt (und somit ausgeleert) bis die Oberfläche der Flüssigkeit auf der einen Seite den Boden des Glases berührt. Man berechne das Volumen der Flüssigkeit welche sich noch im Glas befindet.

(iii) Das Glas wird weiter abgekippt, bis die Flüssigkeit den halben Boden des Glases freigibt. Man berechne das Volumen der Flüssigkeit welche sich noch im Glas befindet.

Hinweis: Es ist von Vorteil das Koordinatensystem fest verbunden mit dem Glas und den Ursprung im Zentrum des Bodens zu wählen. Die Flüssigkeitsoberfläche ist dann eine Funktion der beiden Koordinaten in der Ebene und wird am besten zuerst in Abhängigkeit von $x$-$y$-Koordinaten formuliert und dann auf Polarkoordinaten umgeschrieben.

**Lösung.** Wir verwenden die Koordinaten des Hinweises. Die Bodenfläche ist jeweils gegeben durch $z = 0$ und somit kann das Volumen direkt durch das Volumen unterhalb des Graphen der jeweiligen Funktion berechnet werden.

(i) Die Funktion welche die Flüssigkeitsoberfläche beschreibt ist $f(x, y) = H$. In Polarkoordinaten: $f(r, \varphi) = H$. Das Volumen ist somit

$$V_{(\mathrm{i})} = \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} H r dr d\varphi = H \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{d/2} d\varphi = H \int_0^{2\pi} \frac{d^2}{8} d\varphi = \frac{d^2\pi}{4} H,$$

was mit der Formel für das Zylindervolumen übereinstimmt.

(ii) Die Funktion welche die Flüssigkeitsoberfläche beschreibt ist $f(x, y) = \frac{H}{d} y + \frac{H}{2}$ (die Funktion verschwindet für $y = -d/2$, ist gleich $H$ für $y = d/2$ und dazwischen linear in $y$). In Polarkoordinaten: $f(r, \varphi) = \frac{H}{d} r \sin(\varphi) + \frac{H}{2}$. Das Volumen ist somit

$$\begin{aligned} V_{(\mathrm{ii})} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} \left(\frac{H}{d} r \sin(\varphi) + \frac{H}{2}\right) r dr d\varphi \\ &= \frac{H}{d} \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} H r dr d\varphi}_{=V_{(\mathrm{i})}} \\ &= \frac{H}{d} \frac{r^3}{3}\bigg|_0^{d/2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi}_{=0} + \frac{d^2\pi}{8} H = \frac{d^2\pi}{8} H \end{aligned}$$

(iii) Die Funktion welche die Flüssigkeitsoberfläche beschreibt ist $f(x, y) = \frac{2H}{d} y$ (die Funktion verschwindet für $y = 0$, ist gleich $H$ für $y = d/2$ und dazwischen linear). In Polarkoordinaten $f(r, \varphi) = \frac{2H}{d} r \sin(\varphi)$ mit $\varphi \in [0, \pi]$. Das Volumen ist

$$\begin{aligned} V_{(\mathrm{iii})} = \int_0^{\pi} \int_0^{d/2} \frac{2H}{d} r \sin(\varphi) r dr d\varphi &= \frac{2H}{d} \int_0^{\pi} \frac{r^3}{3}\bigg|_0^{d/2} \sin(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{2H}{3d} \frac{d^3}{8} \int_0^{\pi} \sin(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{d^2 H}{12} (-\cos(\varphi))\bigg|_0^{\pi} = \frac{d^2 H}{6}. \end{aligned}$$