PRÜFUNG ANALYSIS 2
28. MÄRZ 2019
MUSTERLÖSUNG

Punkteverteilung.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	total
Punkte	3	2	2	2	1.5	1.5	1.5	1.5	15

Aufgabe 1. Man bestimme die folgenden unbestimmten Integrale:

(i) $\int x dx$ (iv) $\int \frac{4}{x} dx$ (vii) $\int 1000 dx$

(ii) $\int \cos(x) dx$ (v) $\int \frac{7}{x^7} dx$ (viii) $\int \frac{e^{4x}}{4} dx$

(iii) $\int \sqrt[3]{x} dx$ (vi) $\int (6x^{11} - 17x^{13}) dx$ (ix) $\int x^{\pi - 1} dx$

Lösung.

(i) $\frac{x^2}{2} + C$ (iv) $4\log(x) + C$ (vii) $1000x + C$

(ii) $\sin(x) + C$ (v) $-\frac{7}{6x^6} + C$ (viii) $\frac{e^{4x}}{16} + C$

(iii) $\frac{3}{4}x^{4/3} + C$ (vi) $\frac{1}{2}x^{12} - \frac{17}{14}x^{14} + C$ (ix) $\frac{x^\pi}{\pi} + C$

Aufgabe 2. Wir betrachten das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

(i) Man bestimme die Riemannsche Obersumme $\overline{S}_4$.
(ii) Man bestimme die Riemannsche Untersumme $\underline{S}_4$.
(iii) Man finde einen Ausdruck für die Riemannsche Obersumme $\overline{S}_n$.
(iv) Man finde einen Ausdruck für die Riemannsche Untersumme $\underline{S}_n$.
(v) Man zeige dass

$$\lim_{n \to \infty} (\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0.$$

(vi) Man bestimme das obige Integral als Grenzwert einer Folge von Riemannschen Obersummen.

Hinweise:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Lösung.

(i)

$$\overline{S}_4 = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2\right) = \frac{15}{32}.$$

(ii)

$$\underline{S}_4 = \frac{1}{4}\left(0^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \frac{7}{32}.$$

(iii)

$$\overline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1).$$

(iv)

$$\underline{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{6}(n+1)(2n+1) - (n+1) + 1\right)$$

(v)

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{S}_n - \underline{S}_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

(vi)

$$\overline{S}_n = \frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten das Gebiet begrenzt durch $y = |x| - 2$ und die x-Achse.

(i) Man bestimme die Fläche des Gebiets mit Hilfe der Integralrechnung.

(ii) Das Gebiet wird um $x = -3$ rotiert. Man berechne das entstandene Volumen mit Hilfe von Integralrechnung.

Lösung.

(i)

$$\begin{aligned} A = \int_{-2}^{2}(2-|x|)dx &= \int_{-2}^{0}(2+x)dx + \int_{0}^{2}(2-x)dx \\ &= (2x + \frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^{0} + (2x - \frac{x^2}{2})\Big|_{0}^{2} \\ &= 4 - 2 + 4 - 2 = 4. \end{aligned}$$

(ii)

$$V = \pi\int_{-2}^{0}\left((y+5)^2 - (-y+1)^2\right)dy = \pi\int_{-2}^{0}(12y+24)dy = \pi(40 - 2/3).$$

Aufgabe 4.

(i) Man bestimme das folgende Integral mit partieller Integration:

$$\int x^2\cos(x)dx.$$

(ii) Man bestimme das folgende Integral mit Substitution:

$$\int (15t^{-2} - 5t)\cos(6t^{-1} + t^2)dt.$$

Lösung.

(i)

$$\begin{aligned} \int x^2\cos(x)dx &= x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)dx \\ &= x^2\sin(x) - 2\left(-x\cos(x) + \int\cos(x)dx\right) \\ &= (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + C. \end{aligned}$$

(ii) Wir benutzen die Substitution $u = 6t^{-1} + t^2$. Es folgt $\frac{du}{dx} = -6t^{-2} + 2t$ und somit

$$\begin{aligned}\int (15t^{-2} - 5t)\cos(6t^{-1} + t^2)dt = \int \frac{5(3t^{-2} - t)}{-2(3t^{-2} - t)}\cos(u)du &= -\int \frac{5}{2}\cos(u)du \\ &= -\frac{5}{2}\sin(u) + C \\ &= -\frac{5}{2}\sin(6t^{-1} + t^2) + C.\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Ein Dachdecker transportiert Material auf das Dach indem er es in einem Korb verstaut und den Korb mit einer Kette vom Dach aus hochzieht. Die Masse des Korbes mit Inhalt beträgt 50 (sämtliche Angaben in SI-Einheiten). Die Dachhöhe beträgt 20. Im folgenden soll mit einer Gravitationskonstanten von 10 gerechnet werden.

(i) Die Masse der Kette sei vernachlässigbar. Man bestimme die mechanische Arbeit die beim Hochheben des Materials verrichtet wird.

(ii) Die Kette hat eine Masse pro Meter Länge von 1. Man bestimme die mechanische Arbeit die beim Hochheben des Materials verrichtet wird.

Lösung.

(i) Die wirkende Kraft ist konstant. Sei m die Masse des Korbes mit Inhalt und sei g die Gravitationskonstante. Wir haben

$$W = \int_a^b F(z)dz = \int_0^{20} mgdz = \int_0^{20} 50 \cdot 10dz = 10000.$$

(ii) Wir bezeichnen die Länge des hängenden Kettenstücks mit $l(z)$ und die Masse pro Meter Länge der Kette mit ρ. Wir haben $l(z) = 20 - z$ und somit folgt

$$\begin{aligned}W = \int_0^{20} (mg + l(z)\rho g)dz &= \int_0^{20} (50 \cdot 10 + (20 - z)1 \cdot 10)dz \\ &= \left(500z + 200z - 5z^2\right)\Big|_0^{20} = \ldots = 12000.\end{aligned}$$

Aufgabe 6. Sei

$$f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}.$$

Man bestimme die Bogenlänge des Graphen $y = f(x)$ im Intervall $x \in [1, 4]$. Hinweis: Binomische Formeln benutzen.

Lösung. Wir haben

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}.$$

Somit folgt

$$1 + \left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2 = 1 + \frac{x^4}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

Somit ist die Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2}dx = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{12} - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4 = \ldots = 6.$$

Aufgabe 7. Ein Komet welcher zum Zeitpunkt $t = 0$ in die Erdatmosphäre eintritt erfährt in guter Näherung die Beschleunigung (sämtliche Angaben in SI-Einheiten):

$$a(t) = -10e^{-2t}.$$

(i) Man bestimme die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit, wenn der Komet beim Eintritt eine Geschwindigkeit von 10 aufweist.

(ii) Man bestimme den zurückgelegten Weg in der Atmosphäre in Abhängigkeit der Zeit.

Lösung.

(i) Wir haben $v(t) = 5e^{-2t} + C_1$. Mit $v(0) = 10$ folgt $C_1 = 5$, i.e. der Geschwindigkeitsverlauf ist

$$v(t) = 5e^{-2t} + 5.$$

(ii) Wir haben $s(t) = -\frac{5}{2}e^{-2t} + 5t + C_2$. Mit $s(0) = 0$ folgt $C_2 = \frac{5}{2}$, i.e. der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit der Zeit ist

$$s(t) = -\frac{5}{2}e^{-2t} + 5t + \frac{5}{2}.$$

Aufgabe 8.

(i) Man bestimme

$$\text{(a)} \quad \frac{d}{dt}\int_0^t \arccos(x)dx, \qquad \text{(b)} \quad \frac{d^2}{dt^2}\int_t^{17} \cos(4x)dx.$$

(ii) Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion. Der Graph $y = f'(x)$ entspricht dem Halbkreis in der oberen Hälfte der x-y-Ebene, mit Zentrum im Ursprung und Radius $r = 4$. Man finde $f(-4)$, falls $f(4) = 7$ gilt.

Lösung. Alle Resultate folgen mit dem Fundamentalsatz.

(i)

$$\text{(a)} \quad \arccos(t), \qquad \text{(b)} \quad 4\sin(4t).$$

(ii) Die Fläche des Halbkreises unterhalb von $y = f'(x)$ ist 8π. Es folgt

$$8\pi = \int_{-4}^{4} f'(x)dx = f(4) - f(-4),$$

wobei die erste Gleichung aus dem Flächeninhalt unter dem Graphen $y = f'(x)$ folgt und die zweite Gleichung aus dem Fundamentalsatz. Mit $f(4) = 7$ folgt

$$f(-4) = 7 - 8\pi.$$