ANALYSIS 2
VERSION 4. Juni 2021

LISIBACH ANDRÉ

1. Integralrechnung

1.1. **Motivation.** Abschnitt 1.1.1 motiviert den Begriff der Stammfunktion, Abschnitt 1.1.2 motiviert den Begriff des bestimmten Integrals.

1.1.1. *Physikalische Motivation: Kinematik.* Sei $f(t)$ die Position eines Körpers zur Zeit t. Im Abschnitt zur Differentialrechnung haben wir gesehen dass die Geschwindigkeit $v(t)$ gegeben ist durch[1]

$$v(t) = \frac{df}{dt}(t)$$

und die Beschleunigung gegeben ist durch

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \frac{d^2f}{dt^2}(t).$$

Bei gegebener Position $f(t)$ erlauben es die obigen Gleichungen somit die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Körpers zu berechnen.

Ein natürliches Problem ist die Umkehrung dieser Berechnungen, i.e. die Berechnung der Position aus gegebener Geschwindigkeit oder die Berechnung der Geschwindigkeit aus gegebener Beschleunigung. Diese Berechnungen finden ihre Anwendung in der Praxis, da in vielen Situationen eine bekannte Kraft $F(t)$ auf einen Körper einwirkt (zum Beispiel die Gravitationskraft). Mit dieser bekannten Kraft ist die Beschleunigung durch das Newtonsche Bewegungsgesetz ($F = ma$) gegeben:

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}$$

(hier ist m die Masse des betrachteten Körpers) und durch Umkehrung der Ableitung lässt sich die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Position $f(t)$ berechnen. Die Umkehrung der Ableitung ist das Bestimmen einer *Stammfunktion*.

Die Kinematik ist bei weitem nicht das einzige Anwendungsgebiet der Integralrechnung. Die meisten physikalischen Gesetze sind gegeben durch Differentialgleichungen, i.e. in diesen Gleichungen treten die Ableitungen der gesuchten Funktionen auf. Die Umkehrung der Ableitung ist somit zentral zur Berechnung der Lösungen dieser Gleichungen.

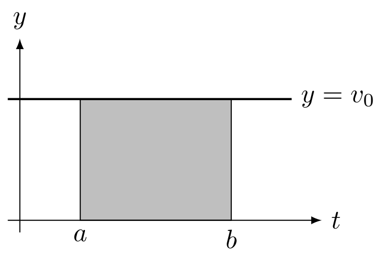
1.1.2. *Geometrischer Zusammenhang.* Wir stellen einen Zusammenhang her zwischen der obigen kinematischen Motivation und einem geometrischen Problem. Wir betrachten einen Körper der sich in einer Dimension mit konstanter Geschwindigkeit $v(t) = v_0 =$ konst. bewegt. Der zurückgelegte Weg zwischen der Zeit $t = a$ und $t = b$ ist gegeben durch

$$\text{Zurückgelegter Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeitdifferenz}$$

[1]Dies ist die Definition der Geschwindigkeit im Falle einer Bewegung in einer Dimension. In mehreren Dimensionen ist die Position beschrieben durch $\overrightarrow{r}(t)$ und die Geschwindigkeit definiert durch $\overrightarrow{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}(t)$.

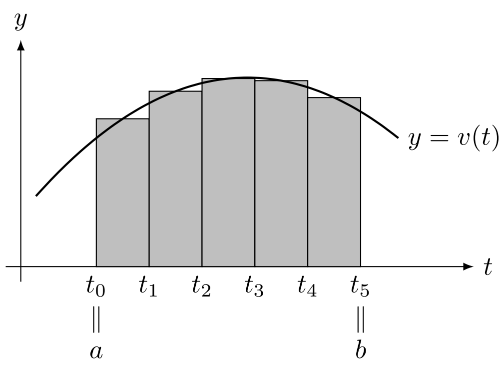
$$= v_0(b-a).$$

Betrachten wir den Graphen der Funktion $y = v(t) = v_0$ dann entspricht der zurückgelegte Weg der Fläche zwischen der t-Achse und dem Graphen der Funktion $y = v_0$, horizontal begrenzt durch $a \leq t \leq b$:



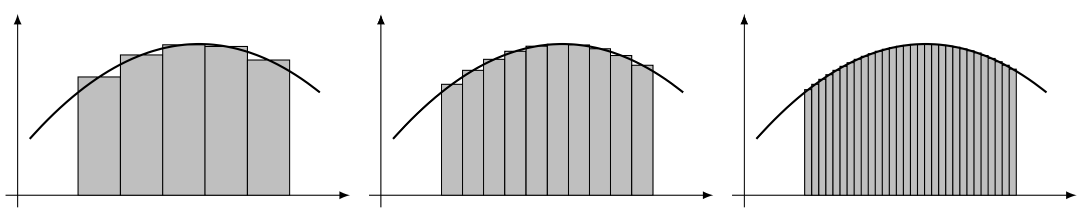
Nun betrachten wir eine Situation in welcher die Geschwindigkeit $v(t)$ des Körpers nicht konstant ist. Die obige einfache Formel zur Berechnung des zurückgelegten Weges zwischen den Zeitpunkten $t = a$ und $t = b$ ist nicht mehr direkt anwendbar. Die folgende Idee führt zu einer approximativen Berechnung des zurückgelegten Weges: Man unterteilt den betrachteten Zeitabschnitt $[a, b]$ in Teilabschnitte und nimmt in jedem Teilabschnitt die Geschwindigkeit als konstant an. In jedem Teilabschnitt ist die obige Formel zur Berechnung des zurückgelegten Weges anwendbar.

Geometrisch betrachtet entspricht diese Approximation des zurückgelegten Weges der Fläche zusammengesetzt aus Rechtecken, deren Grundseite auf der t-Achse liegt und deren Höhe durch den als konstant gewählten Wert der Geschwindigkeit im jeweiligen Intervall gegeben ist:



(In dieser Grafik wurde das Intervall $[a, b]$ in fünf Teilintervalle $[t_{i-1}, t_i]$ mit $i = 1, \ldots, 5$ unterteilt und der konstante Funktionswert in den Intervallen wurde durch die Auswertung der Funktion $v(t)$ jeweils in der Mitte der Teilintervalle bestimmt).

Je grösser man die Anzahl Teilintervalle wählt, desto besser wird die Approximation des zurückgelegten Weges.



Die Approximation nähert sich der Fläche unter dem Graphen von $y = v(t)$, somit entspricht der zurückgelegte Weg also dieser Fläche[2]. Die Berechnung der Fläche unter dem Graphen einer Funktion ist die Berechnung des *bestimmten Integrals*[3].

Wir haben bis zu diesem Punkt die beiden Begriffe Stammfunktion und bestimmtes Integral motiviert. Das Auffinden einer Stammfunktion entspricht der Umkehrung der Ableitung und die Berechnung des bestimmten Integrals entspricht der Berechnung der Fläche unter der Kurve des Graphen der Funktion. Wir haben aber gesehen dass in der physikalischen Anwendung der Kinematik beides der Berechnung des Weges (oder Position, was in den obigen Beispielen das gleiche ist) aus einer gegebenen Geschwindigkeit entspricht. Somit ist klar dass die Stammfunktion und das bestimmte Integral eng miteinander verknüpft sind. Diese Verknüpfung wird durch den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung hergestellt.

1.2. **Stammfunktion.**

1.2.1. *Definition.* $F(x)$ ist eine *Stammfunktion* von $f(x)$, falls gilt

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x).$$

Notation: Wir verwenden wenn immer möglich Kleinbuchstaben für Funktionen und Grossbuchstaben für dazugehörige Stammfunktionen.

Beispiele:

(i) Die Funktion $f(x) = x$ besitzt die Stammfunktion $F(x) = \frac{x^2}{2}$, da $\frac{dF}{dx}(x) = \frac{2x}{2} = x$.
(ii) Die Funktion $h(t) = \cos(t)$ besitzt die Stammfunktion $H(t) = \sin(t)$.
(iii) Die Funktion $m(n) = e^n$ besitzt die Stammfunktion $M(n) = e^n$.

Aus der Definition der Stammfunktion als Umkehrung der Ableitung ergeben sich die beiden folgenden Eigenschaften:

Seien $F(x)$, $G(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, $g(x)$. Dann gilt

(i) $F(x) + G(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$,
(ii) $\lambda F(x)$ ist eine Stammfunktion von $\lambda f(x)$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Beispielsweise besitzt die Funktion $f(x) = 8x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ die Stammfunktion $F(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x$.

Wir sehen dass zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ die Stammfunktion nicht eindeutig bestimmt ist. Beispielsweise sind die beiden Funktionen $F_1(x) = \sin(x) + 1$ und $F_2(x) = \sin(x)$ beides Stammfunktionen von $f(x) = \cos(x)$. I.e. Stammfunktionen sind nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Falls also $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, so ist $F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ auch eine Stammfunktion von $f(x)$. Beispielsweise ist die Menge aller Stammfunktionen von $f(x) = x^2$ gegeben durch $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen:

(i) Wir verwenden die Notation $F(x) = \ldots$ und schreiben auf der rechten Seite die Menge aller Stammfunktionen. Wir werden nach der Behandlung des bestimmten Integrals für die Menge der Stammfunktionen eine bessere Notation einführen.

[2] Wir weisen darauf hin dass im Allgemeinen der zurückgelegte Weg und die Position eines Körpers nicht übereinstimmen. Dies sieht man am Beispiel eines Oszillators, dessen Position am Anfang und am Ende einer Schwingungsperiode gleich sind (zum Beispiel der Nulllage entsprechen), welcher aber durch die Schwingungsbewegung während der Periode einen Weg zurückgelegt hat.

[3] Dies ist nur korrekt wenn man Flächen unterhalb der t-Achse mit negativem Vorzeichen gewichtet (siehe später).

(ii) In Anwendungen wird die Konstante C (meistens) durch zusätzliche Bedingungen fixiert.

1.2.2. *Anwendung Kinematik.* Wir illustrieren an einem Beispiel. Ein Körper wird zur Zeit $t = 0$ aus einer Höhe $z_0 = 10$ mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = -2$ geworfen (wir lassen die Einheiten weg). Gesucht ist die Höhe des Körpers in Abhängigkeit der Zeit: $z(t)$ und der Zeitpunkt t^* des Aufpralls des Körpers auf der Oberfläche $z = 0$.

Wir nehmen an dass die Beschleunigung gegeben ist durch $a(t) = -10$ (Erdbeschleunigung in der Nähe der Erdoberfläche). Die Beschleunigung $a(t)$ ist die Ableitung der Geschwindigkeit $v(t)$. Somit ist die Geschwindigkeit $v(t)$ gegeben durch eine Stammfunktion von $a(t)$. Aus $a(t) = -10$ folgt also $v(t) = -10t + C_1$ mit $C_1 \in \mathbb{R}$. Aus der Information $v(0) = v_0 = -2$ folgt $C_1 = -2$ und somit

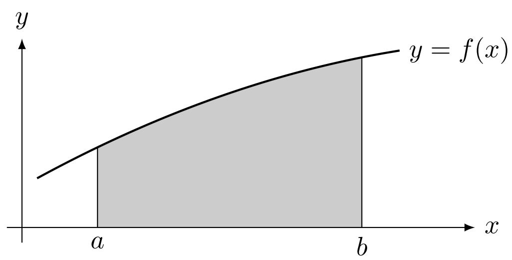
$$v(t) = -10t - 2.$$

Die Geschwindigkeit $v(t)$ ist die Ableitung der Position $z(t)$. Somit ist die Position $z(t)$ gegeben durch eine Stammfunktion von $v(t)$, i.e. $z(t) = -5t^2 - 2t + C_2$ mit $C_2 \in \mathbb{R}$. Aus der Information $z(0) = z_0 = 10$ folgt

$$z(t) = -5t^2 - 2t + 10.$$

Aus dieser Gleichung kann der Zeitpunkt des Aufpralls des Körpers auf der Oberfläche $z = 0$ bestimmt werden. Aus $z(t^*) = 0$ und $t^* \geq 0$ folgt $t^* = \frac{1}{5}(\sqrt{51} - 1)$.

1.3. **Bestimmtes Integral.** Sei $f(x)$ eine Funktion so dass $f(x) \geq 0$, definiert auf einem Intervall $[a, b]$. Wir betrachten die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen $y = f(x)$, horizontal begrenzt durch $a \leq x \leq b$.

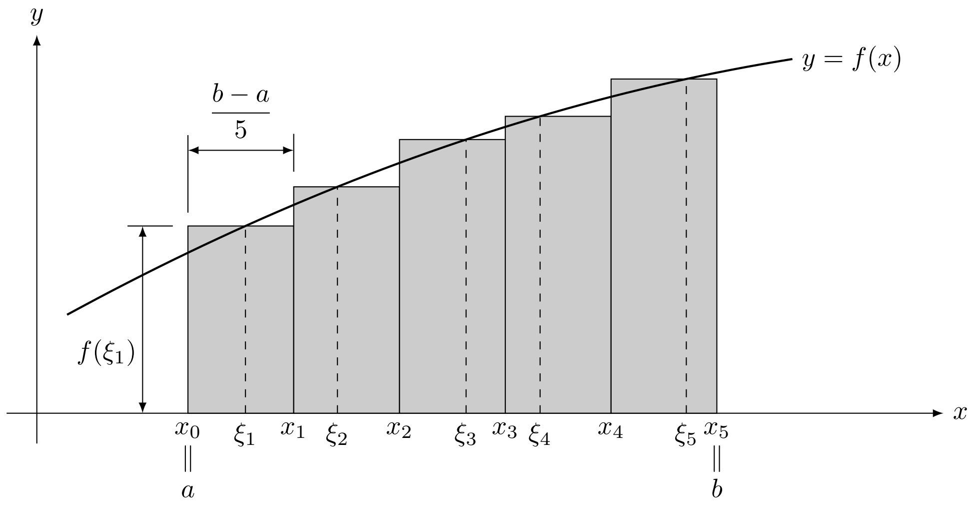


Um eine Approximation für diese Fläche zu erhalten unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ in fünf gleichlange Teilintervalle $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Nun wählen wir $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ für $i = 1, 2, \ldots, 5$. Die Funktion $f(x)$ approximieren wir nun durch

$$\tilde{f}(x) = f(\xi_i) \quad \text{für} \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Die Funktion $\tilde{f}$ hat die Form einer Treppenfunktion, welche auf den Teilintervallen jeweils konstant ist. Diese Approximation der Funktion $f(x)$ liefert nun eine Approximation des

Flächeninhaltes als Summe von Rechtecksflächen unter der Treppenfunktion.



Die Breite der Rechtecke ist $\frac{b-a}{5}$ und der Flächeninhalt des ersten Rechteckes ist gleich $\frac{b-a}{5} f(\xi_1)$. Die Fläche unter der Treppenfunktion ist somit

$$\begin{aligned} \text{Fläche}_{\tilde{f}} &= \frac{b-a}{5}\Big(f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_5)\Big) \\ &= \frac{b-a}{5} \sum_{i=1}^{5} f(\xi_i). \end{aligned}$$

Führt man die Approximation mit n Unterteilungen durch so erhält man für die *Approximation der Fläche*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$

S_n wird als *Riemannsche Summe der Ordnung* n bezeichnet.

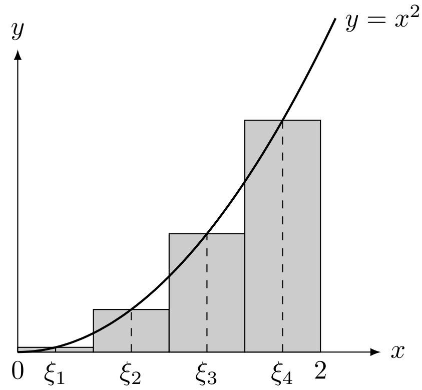
Bemerkungen:

(i) Die Riemannsche Summe ist auch für $f \leq 0$ definiert, jedoch ergeben sich negative Anteile. Somit liefert die Riemannsche Summe einen vorzeichenbehafteten Flächeninhalt, i.e. Flächeninhalte zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse, wobei der Graph der Funktion unterhalb der x-Achse verläuft, besitzen negatives Vorzeichen.

(ii) Die Riemannsche Summe hängt von der Wahl der ξ's ab. Der nachfolgend betrachtete Grenzübergang zeigt jedoch dass diese Abhängigkeit verlorengeht (siehe unten).

Wir betrachten als Beispiel die Funktion $f(x) = x^2$ und berechnen die Riemannsche Summe S_4. Für die Wahl der ξ's wählen wir x-Werte die jeweils in der Mitte der Teilintervalle liegen, i.e. wir wählen

$$\xi_1 = \frac{1}{4}, \quad \xi_2 = \frac{3}{4}, \quad \xi_3 = \frac{5}{4}, \quad \xi_4 = \frac{7}{4}.$$



Die Riemannsche Summe ist

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1+9+25+49}{16} = \frac{84}{32}.
\end{aligned}
$$

Es gibt viele Möglichkeiten die ξ-Werte in den Teilintervallen zu wählen. Zwei spezielle Möglichkeiten sind die folgenden:

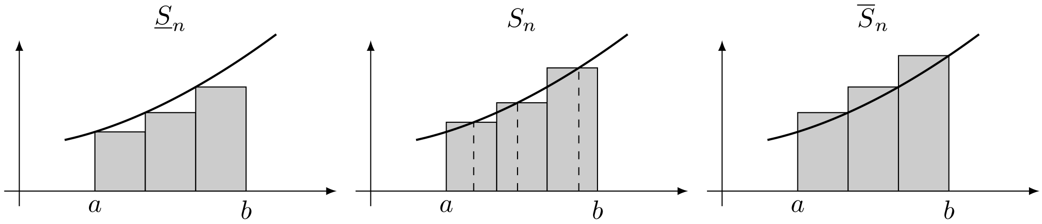
(i) So dass die Riemannsche Summe maximal wird, i.e. man wählt die ξ-Werte so dass $f(\xi_i)$ dem Maximum von $f(x)$ im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ entspricht. Die erhaltenen Summe bezeichnet man als *Obersumme*, sie wird mit $\overline{S}_n$ notiert.

(ii) So dass die Riemannsche Summe minimal wird, i.e. man wählt die ξ-Werte so dass $f(\xi_i)$ dem Minimum von $f(x)$ im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ entspricht. Die erhaltenen Summe bezeichnet man als *Untersumme*, sie wird mit $\underline{S}_n$ notiert.

Für eine allgemeine Wahl der ξ-Werte welche zur Riemmanschen Summe S_n führt gilt

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n.$$

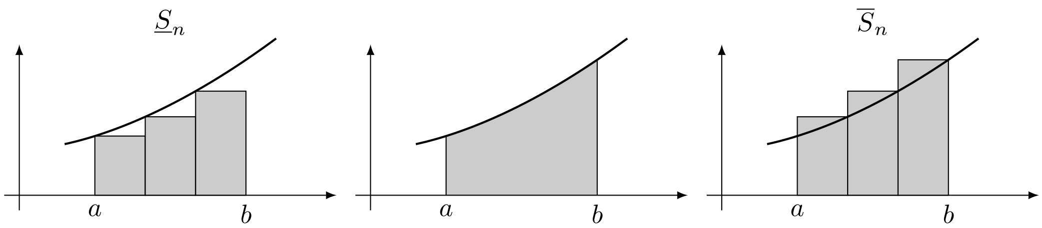
Im Falle einer monoton wachsenden Funktion ergibt sich das folgende Bild für die drei Summen:



Es gilt auch die folgende Ungleichung

$$\underline{S}_n \leq \text{Fläche unter dem Graphen} \leq \overline{S}_n,$$

illustriert durch:



Wir illustrieren nun den Effekt der Anzahl Teilintervalle anhand der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0,1]$, indem wir die Riemannschen Ober- und Untersummen zweiter und vierter Ordnung berechnen. Für S_2 betrachten wir zwei Teilintervalle. Wir haben

$$\underline{S}_2 = \frac{1}{2}\left(0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{8}, \qquad \overline{S}_2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right) = \frac{5}{8}.$$

Für S_4 betrachten wir vier Teilintervalle. Wir haben

$$\underline{S}_4 = \frac{1}{4}\left(0^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \frac{7}{32},$$

$$\overline{S}_4 = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2\right) = \frac{15}{32}.$$

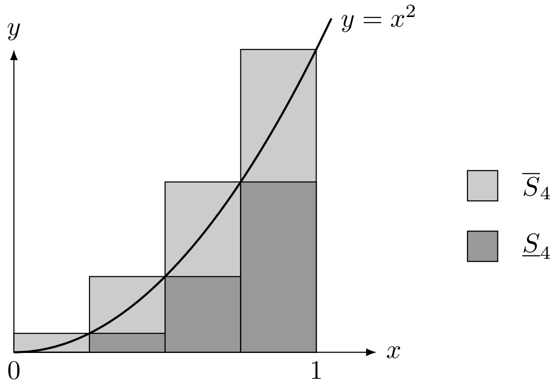
Wir sehen dass

$$\overline{S}_2 - \underline{S}_2 = \frac{1}{2}, \qquad \overline{S}_4 - \underline{S}_4 = \frac{1}{4}.$$

Eine Unterteilung in n Teilintervalle ergibt

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{1}{n}.$$

Diese Differenzen zwischen Ober- und Untersummen sind geometrisch verständlich, da die Obersumme, bis auf das letzte Rechteck, aus den selben Rechtecken besteht wie die Untersumme, einfach um $\frac{b-a}{n}$ verschoben. Das letzte Rechteck hat Fläche $\frac{1}{n}$, dies ist somit die Differenz der beiden Riemannschen Summen.



Somit haben wir

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{S}_n - \underline{S}_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Aus der Ungleichung $\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$ folgt nun

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\overline{S}_n.$$

Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ existiert also, ist eindeutig und unabhängig von der Wahl der ξ's. Dieser, an der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0,1]$, gezeigte Grenzübergang ist allgemein ausführbar und wird als Definition des bestimmten Integrals verwendet. I.e. das *bestimmte Integral* einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ ist definiert durch

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Hierbei ist $\int$ das Integralsymbol, seine Form soll an ein S für Summe erinnern. a, b nennt man *Integrationsgrenzen*. Der Ausdruck dx ist das *Integrationsmass* oder kurz

Mass und seine Bedeutung ist die infinitesimale Version der Länge der Teilintervalle in der Riemannschen Summe $\frac{b-a}{n}$.

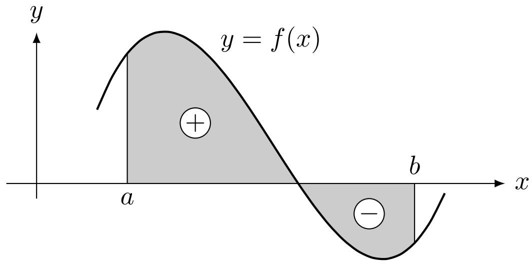
1.3.1. *Geometrische Interpretation des bestimmten Integrals.* Wir haben die Behandlung des bestimmten Integrals anhand einer Funktion $f(x) \geq 0$ durchgeführt. Falls nun $f(x) < 0$ in einem Bereich des betrachteten Intervalls gilt, so macht der Ausdruck der Riemannschen Summe

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

immer noch Sinn, liefert jedoch negative Anteile. Die Interpretation des bestimmten Integrals als Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x-Achse muss also wie folgt angepasst werden: Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

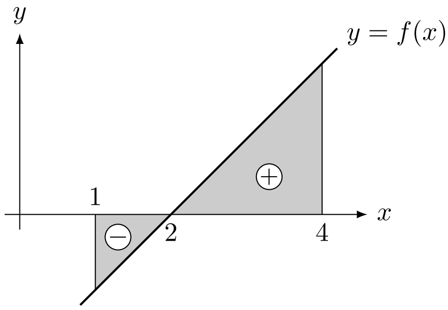
entspricht der vorzeichenbehafteten Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x)$, i.e. es entspricht der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x)$, wobei jedoch die Anteile der Flächen unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden:



Durch diese Interpretation des bestimmten Integrals als vorzeichenbehafteten Flächeninhalt kann man gewisse Integrale aus bekannten Flächen berechnen. Als Beispiel berechnen wir das Integral

$$\int_1^4 (x-2)dx.$$

Die Flächen zwischen dem Graphen der Funktion $y = f(x) = x - 2$ und der x-Achse, mit zugehörigem Vorzeichen sind:



Somit ist das Integral gegeben durch die Differenz von zwei Dreiecksflächen:

$$\int_1^4 (x-2)dx = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

1.3.2. *Eigenschaften des bestimmten Integrals.* Das bestimmte Integral erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(i) Summenregel:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) Faktorregel:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,$$

wobei C eine Konstante ist[4].

(iii) Vertauschungsregel:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

(iv) Intervalllänge Null:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

(v) Zerlegungsregel:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

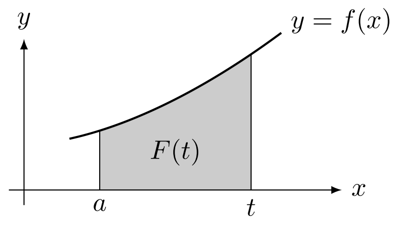
für $a \leq c \leq b$.

Die Regeln (i), (ii), (iv) und (v) können direkt auf dem Niveau der Riemannschen Summen verstanden werden. Die Regel (iii) ist als Definition anzusehn. Diese Definition macht Sinn, da dx die infinitesimale Version der Breite $\frac{b-a}{n}$ darstellt und sich bei einer Vertauschung der Intervallgrenzen die Breite $\frac{a-b}{n} = -\frac{b-a}{n}$ ergibt.

1.4. **Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.** Wir betrachten die Funktion $F(t)$ gegeben durch

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx,$$

i.e. wir betrachten ein bestimmtes Integral aber sehen die obere Integralgrenze als Variable t:



Nun stellen wir die Frage nach der Bedeutung der Ableitung der Funktion $F(t)$. Die Ableitung ist gegeben durch

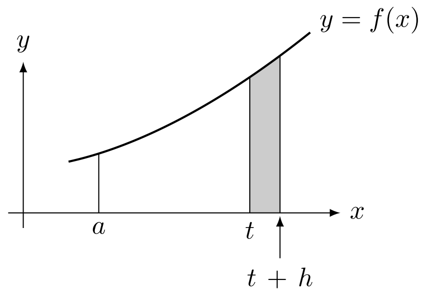
$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}.$$

[4]Die Eigenschaften (i) und (ii) sind die Eigenschaften für Linearität, die Bildung des bestimmten Integrals ist also eine lineare Operation. Man beachte dass diese Eigenschaften auch beim Differentieren, i.e. bei der Bildung der Ableitung erfüllt sind und somit das Differentieren auch eine lineare Operation ist: $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$, $\frac{d}{dx}(Cf) = C\frac{df}{dx}$.

Der Zähler im Bruch auf der linken Seite ist

$$\begin{aligned} F(t+h) - F(t) &= \int_a^{t+h} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx \\ &= \int_t^{t+h} f(x)dx. \end{aligned}$$

Dies ist die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von $f(x)$, begrenzt durch $t \leq x \leq t+h$.



$F(t+h) - F(t) = \int_t^{t+h} f(x)dx$

I.e. die Ableitung von $F(t)$ ist

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\int_t^{t+h} f(x)dx}{h}.$$

Sei nun M_h das Maximum von $f(x)$ im Intervall $[t, t+h]$ und m_h das Minimum von $f(x)$ im Intervall $[t, t+h]$. Dann gilt

$$m_h \cdot h \leq \int_t^{t+h} f(x)dx \leq M_h \cdot h.$$

Hier steht auf der rechten und linken Seite jeweils ein Flächeninhalt einer Rechtecksfläche, i.e. das Integral $\int_t^{t+h} f(x)dx$ befindet sich zwischen zwei Rechtecksflächen. Wenn wir durch h dividieren ist dies die Ungleichung

$$m_h \leq \frac{\int_t^{t+h} f(x)dx}{h} \leq M_h.$$

Hier steht in der Mitte der gesuchte Bruch der in der Ableitung von $F(t)$ auftaucht. Wenn wir das Intervall $[t, t+h]$ verkleinern, i.e. wir verkleinern h, dann wird der Unterschied zwischen dem Maximum M_h und dem Minimum m_h der Funktion $f(x)$ in diesem Intervall kleiner. Hier setzen wir voraus dass die Funktion $f(x)$ stetig ist (also keine Sprungstelle aufweist). Es gilt

$$\lim_{h \to 0} m_h = f(t) = \lim_{h \to 0} M_h,$$

i.e. die linke und rechte Seite der obigen Ungleichung strebt nach $f(t)$ für $h \to 0$. Somit strebt auch der Bruch in der Mitte der obigen Ungleichung nach $f(t)$ und wir finden

$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t),$$

i.e. $F(t)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Wir betrachten nun das bestimmte Integral mit Integralgrenzen a und b und benutzen die Funktion $F(t)$. Wir haben

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= F(b) \\ &= F(b) - F(a), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile benutzt haben dass $F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$ ist. Wir wissen nun dass $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist. Sei nun $G(t)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(t)$. Diese Stammfunktion kann sich von $F(t)$ nur durch eine additive Konstante unterscheiden, i.e. es muss gelten

$$G(t) = F(t) + C$$

für eine Konstante C. Somit gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ &= G(b) - C - (G(a) - C) \\ &= G(b) - G(a).\end{aligned}$$

Wir haben also das folgende Resultat:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a),$$

wobei $G(t)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$ ist. Für eine solche Differenz $G(b) - G(a)$ verwenden wir die Notation

$$G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a).$$

Dieses Resultat führt nun zu einer einfachen Berechnung eines bestimmten Integrals einer Funktion $f(x)$ durch eine Differenz einer Stammfunktion $F(x)$.

Wir berechnen beispielsweise das Integral $\int_0^1 x^2dx$ mit dieser Methode (wir haben dieses Integral schon mit Hilfe der Definition, i.e. mit Riemannschen Summen, berechnet). Die zu integrierende Funktion ist $f(x) = x^2$. Eine Stammfunktion davon ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ (wir wählen diese spezielle Stammfunktion aus, jede andere Stammfunktion funktioniert auch, diese ergibt jedoch am wenigsten Aufwand da die Konstante $C = 0$ ist). Somit ist das Integral gegeben durch

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}.$$

Weitere Beispiele sind:

(i)

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

(ii)

$$\int_3^7 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_3^7 = \frac{1}{2}7^2 - \frac{1}{2}3^2 = 20.$$

(iii)

$$\int_2^4 6x^5dx = x^6\Big|_2^4 = 4^6 - 2^6 = 4032.$$

Der *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung*, sauber ausformuliert, lautet: Sei $f(x)$ eine stetige Funktion, definiert auf dem intervall $[a, b]$. Dann gilt

(i) Die Funktion

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx,$$

mit $a \leq t \leq b$ ist differenzierbar und die Ableitung von $F(t)$ ist gegeben durch

$$\frac{dF}{dt}(t) = f(t),$$

i.e. $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

(ii) Falls $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Als Illustration der besprochenen Methoden und deren direkten Vergleich zur Berechnung eines Integrals bestimmen wir

$$\int_1^3 (-x+2)dx$$

mit

(i) geoemtrischen Methoden (i.e. aus bekannten Flächeninhalten),
(ii) dem Fundamentalsatz,
(iii) der Definition des bestimmten Integrals unter Benutzung von Obersummen unter Verwendung von

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die Resultate lauten:

(i) Es handelt sich um eine Differenz von zwei Dreiecksflächen mit gleichem Flächeninhalt:

$$\int_1^3 (-x+2)dx = 0.$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_1^3 (-x+2)dx &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_1^3 \\ &= -\frac{9}{2} + 6 - \left(-\frac{1}{2} + 2\right) \\ &= -\frac{8}{2} + 4 = 0.\end{aligned}$$

(iii) Die Funktion ist fallend. Für die Obersumme verwenden wir somit für die ξ's die x-Werte an den linken Intervallberandungen:

$$\begin{aligned}\xi_i &= 1 + (i-1)\frac{3-1}{n} \\ &= 1 + (i-1)\frac{2}{n}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n.\end{aligned}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}f(\xi_i) &= -\xi_i + 2 \\ &= -1 - (i-1)\frac{2}{n} + 2 \\ &= 1 - (i-1)\frac{2}{n}.\end{aligned}$$

Die Obersumme ist somit

$$
\begin{aligned}
\overline{S}_n &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1-(i-1)\frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1-\sum_{i=1}^{n}i\frac{2}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(n-\frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2}+2\right) \\
&= 2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{4}{n}.
\end{aligned}
$$

Somit haben wir

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n = 2-2=0.$$

1.5. **Unbestimmtes Integral.** Das *unbestimmte Integral* einer Funktion $f(x)$ ist die Menge aller Stammfunktionen von f. Wir notieren das unbestimmte Integral als (unbestimmt da keine Integralgrenzen vorhanden)

$$\int f(x)dx.$$

Beispielsweise ist das unbestimmte Integral von $f(x)=x^2$ gegeben durch

$$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3+C, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Bemerkungen:

(i) Das Auffinden einer Stammfunktion $F(x)$ zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist der zentrale Prozess beim Integrieren, entweder weil die Ableitung einer gesuchten Funktion gegeben ist und man die Funktion selbst sucht, oder weil man ein bestimmtes Integral berechnen will und der Fundamentalsatz dies durch eine Stammfunktion erlaubt.

(ii) Es kann vorkommen, dass eine Stammfunktion $F(x)$ zu einer Funktion $f(x)$ nicht mit Elementarfunktionen geschrieben werden kann, auch wenn die Funktion $f(x)$ mit Elementarfunktionen geschrieben werden kann. Zum Beispiel besitzen die Funktionen e^{-x^2}, $\frac{\sin(x)}{x}$ keine Stammfunktion welche mit Elementarfunktionen geschrieben werden können.

2. Anwendungen der Integralrechnung

2.1. **Flächenberechnung.**

2.1.1. *Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse.* Die *Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion $f(x)$ und der x-Achse* ist im Prinzip durch das Integral gegeben. Jedoch ist bei Graphen unterhalb der x-Achse das Vorzeichen anzupassen (siehe 'Geometrische Interpretation des bestimmten Integrals'). Wir betrachten dazu die folgenden zwei Fragen:

(i) Man bestimme das Integral
$$\int_{-2}^{1}(x^3+x^2-2x)dx.$$

(ii) Man bestimme die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)=x^3+x^2-2x$ und der x-Achse für $-2\leq x\leq 1$.

Die Antworten sind die folgenden.

(i) Für die Berechnung des Integrals benutzen wir den Fundamentalsatz:
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}(x^3+x^2-2x)dx &= \left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_{-2}^{1}\\ &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right)=\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

(ii) Wäre die Funktion im betrachteten Intervall positiv, so wäre die Fläche direkt durch das obige Integral gegeben. Jedoch ist die Funktion im Intervall $(0,1)$ negativ. Um in diesem Intervall trotzdem die Fläche zu berechnen ist somit ein Minuszeichen vor dem Integral nötig (das Integral liefert den Flächeninhalt mit einem Vorzeichen, negativ falls Graph der Funktion unterhalb der x-Achse liegt). Wir teilen also das Integral auf in zwei Bereiche. Den Bereich $x\in[-2,0]$, in welchem die Funktion positiv ist und wo das Integral den Flächeninhalt liefert und in den Bereich $x\in[0,1]$, in welchem das Integral negativ ist und der Flächeninhalt somit minus dem Integral entspricht:
$$\begin{aligned}\text{Fläche} &= \int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx-\int_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)dx\\ &= \left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}-\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}\\ &= \ldots=\frac{37}{12}\end{aligned}$$

Wichtige Bemerkung: Die Fläche kann betrachtet werden als Aufsummierung von kleinen Rechteckflächen, deren Höhe $\pm f(x)$ (Vorzeichen je nach Lage des Graphen: oberhalb x-Achse: $+$, unterhalb x-Achse: $-$) und deren Breite das infinitesimale Längenelement dx beträgt. Diese infinitesimalen Rechtecksfächen sind
$$dA=\pm f(x)dx.$$

Natürlich gilt diese Betrachtung nur im infinitesimalen Sinn, jedoch führen solche Überlegungen beim Aufstellen von Integralen zum korrekten Ergebnis. Der Grund dass dies funktioniert liegt im Aufbau des Integrals als Grenzwert von endlichen Summen. Genau beim bilden dieses Grenzwertes werden aus endlich grossen Rechtecken infinitesimal kleine Rechtecke.

2.1.2. *Fläche zwischen zwei Graphen.* Seien zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben. Gefragt ist der *Flächeninhalt der Fläche zwischen den Graphen* von $f(x)$ und $g(x)$ im Bereich $a \leq x \leq b$. Wie im vorhergehenden Abschnitt kann die Fläche als aufgebaut aus Rechtecksflächen infinitesimaler Breite betrachtet werden. Wir beschränken uns zuerst auf den Fall $f(x) \geq g(x)$. Die Höhe der Rechtecke ist gegeben durch $f(x) - g(x)$. Das infinitesimale Flächenstück ist

$$dA = (f(x) - g(x))dx$$

und die Fläche ist

$$\text{Fläche} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx, \qquad \text{für } f(x) \geq g(x).$$

Es ist zu beachten dass diese Formel auch gilt falls einer oder beide der Graphen der Funktionen $f(x)$, $g(x)$ unterhalb der x-Achse liegen, da die Höhe des infinitesimalen Rechtecks unter der Voraussetzung $f(x) \geq g(x)$ auch in diesen Fällen positiv ist.

Wie bei der Flächenberechnung zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse muss im Fall $f(x) \leq g(x)$ das Vorzeichen angepasst werden. I.e. falls $f(x) \leq g(x)$ im Intervall $[a, b]$, so ist die betrachtete Fläche gegeben durch

$$\text{Fläche} = \int_a^b (g(x) - f(x))dx, \qquad \text{für } f(x) \leq g(x).$$

Den Fall wo $f(x) \geq g(x)$ in einem Bereich des betrachteten Intervalls und $f(x) \leq g(x)$ in einem anderen Bereich gilt illustrieren wir an einem Beispiel. Es soll die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x$ und $g(x) = -x^2 + 3x$ im Intervall $[-2, 2]$ berechnet werden. Die Graphen von $f(x)$, $g(x)$ überschneiden sich. Die Schnittpunkte sind gegeben durch

$$f(x) = g(x).$$

Es folgt für die Schnittpunkte $x = 0, \pm 2$. Einsetzen von x-Werten zwischen den Schnittpunkten liefert

$$f(-1) = 2, \quad g(-1) = -4, \quad f(1) = -4, \quad g(1) = 2.$$

Somit gilt $f(x) \geq g(x)$ im Intervall $(-2, 0)$ und $f(x) \leq g(x)$ im Intervall $(0, 2)$. Die Fläche ist

$$\begin{aligned}
\text{Fläche} &= \int_{-2}^0 (f(x) - g(x))dx + \int_0^2 (g(x) - f(x))dx \\
&= \int_{-2}^0 (2x^3 - 8x)dx - \int_0^2 (2x^3 - 8x)dx \\
&= \left(\frac{x^4}{2} - 4x^2\right)\Bigg|_{-2}^0 - \left(\frac{x^4}{2} - 4x^2\right)\Bigg|_0^2 \\
&= \ldots = 16.
\end{aligned}$$

2.2. **Volumenberechnung.**

2.2.1. *Rotationskörper.* Sei eine Funktion $f(x)$ gegeben so dass $f(x) \geq 0$ im Intervall $[a, b]$. Wir betrachten das Gebiet in der x-y-Ebene begrenzt durch den Graphen $y = f(x)$, die x-Achse, $x = a$ und $x = b$. Dieses Gebiet rotieren wir um die x-Achse. Der resultierende Körper ist ein Rotationskörper mit der x-Achse als Symmetrieachse.

Wir interessieren uns für das Volumen dieses Körpers. Dazu unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teile $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($a = x_0$, $b = x_n$) und betrachten die Ebenen $x = x_i$. Diese Ebenen sind parallel zur y-z-Ebene und zerschneiden den Rotationskörper in Scheiben gleicher Dicke. Diese Dicke ist $\frac{b-a}{n}$. Die Scheiben sind im Allgemeinen nicht zylindrische Scheiben. Wir betrachten eines der Teilintervalle: $[x_{i-1}, x_i]$. In diesem Teilintervall hat die Funktion $f(x)$ ein Maximum M_i und ein Minimum m_i. Für das Volumen der zugehörigen Scheibe V_S gilt

$$m_i^2 \pi \frac{b-a}{n} \leq V_S \leq M_i^2 \pi \frac{b-a}{n},$$

i.e. das Volumen liegt zwischen dem Volumen einer Zylinderscheibe mit dem maximalen Radius M_i und dem Volumen einer Zylinderscheibe mit dem minimalen Radius m_i. Aufsummieren der Scheibenvolumen ergibt das Volumen V des Rotationskörpers. Es gilt

$$\frac{b-a}{n} \pi \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \leq V \leq \frac{b-a}{n} \pi \sum_{i=1}^{n} M_i^2.$$

Der Grenzwert $n \to \infty$ entspricht einer immer feineren Unterteilung in immer dünnere Scheiben. Auf der rechten und linken Seite der Ungleichung befinden sich Riemannsche Summen, welche gegen das Integral $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$ konvergieren. Somit gilt für das *Volumen des Rotationskörpers* gegeben durch die Funktion $f(x)$

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Bemerkung: Analog zu der Interpretation von dA als infinitesimale Fläche eines Rechtecks (siehe Abschnitt zur Flächenberechnung) wird

$$dV = \pi f(x)^2 dx$$

als infinitesimales Volumen interpretiert, i.e. als Volumen einer infinitesimal dünnen Kreisscheibe mit Querschnitt $\pi f(x)^2$ und Dicke dx.

Beispiele:

(i) Kegel mit Höhe 2 und Radius 1. Legt man die Kegelachse auf die positive x-Achse und den Spitz des Kegels in den Ursprung so ist die Funktion $f(x)$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x$ und das relevante Intervall ist $[0, 2]$. Das Volumen ist

$$\begin{aligned} V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx &= \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{\pi}{4} \frac{x^3}{3} \bigg|_0^2 = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

(ii) Kugel mit Radius 1. Wir legen den Kugelmittelpunkt in den Ursprung und berechnen das Volumen der Halbkugel auf der Seite der positiven x-Achse. Die Funktion $f(x)$ ist gegeben durch $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ und das relevante Intervall ist $[0, 1]$. Das Volumen der Halbkugel ist

$$V_H = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_0^1 (1 - x^2) dx = \ldots = \frac{2}{3}\pi.$$

Das Volumen der Kugel mit Radius 1 ist somit $V = \frac{4}{3}\pi$.

(iii) Kugel mit Radius r. Wieder legen wir den Kugelmittelpunkt in den Ursprung und berechnen das Volumen der Halbkugel auf der Seite der positiven x-Achse.

Die Funktion $f(x)$ ist gegeben durch $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ und das relevante Intervall ist $[0, r]$. Das Volumen der Halbkugel ist

$$V_H = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \ldots = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Das Volumen der Kugel mit Radius r ist somit $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

2.2.2. *Querschnitt in Abhängigkeit einer Koordinate gegeben.* Wir illustrieren an einem Beispiel. Wir berechnen das Volumen einer quadratischen Pyramide mit Höhe 8 und Grundquadratseite 4. Wir legen die Pyramidenmittelachse auf die positive x-Achse, so dass der Spitz im Ursprung liegt und die Grundseiten parallel zu den Achsen liegen. Die Querschnitte parallel zur y-z-Ebene sind Quadrate, deren Fläche in Abhängigkeit der x-Koordinate gegeben ist durch $A(x) = \frac{x^2}{4}$ (die Seitenlänge l der Querschnitte wächst linear von Null auf 4 im Intervall $[0, 8]$, sind also gegeben durch $l(x) = \frac{x}{2}$, die Querschnittsfläche ist das Quadrat davon, i.e. $A(x) = \frac{x^2}{4}$). Das Volumen ist somit

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_0^8 \frac{x^2}{4} dx = \ldots = \frac{128}{3}.$$

2.3. **Mechanische Arbeit.** Wir betrachten die Bewegung eines Körpers in einer Dimension. Wir nehmen an die Bewegung finde entlang der x-Achse statt, von $x = a$ bis $x = b$ und die Ursache der Bewegung sei eine Kraft $F(x)$. Wir nehmen an dass die Kraftrichtung gleich der Wegrichtung ist und somit werden die Vektoreigenschaften der Verschiebung und der Kraft für die Beschreibung des Problems nicht benötigt (ansonsten ist eine Projektion des Kraftvektors auf den Verschiebungsvektor nötig). Die von der Kraft $F(x)$ verrichtete Arbeit entlang des Weges ist gegeben durch

$$W = \int_a^b F(x) dx.$$

Wir betrachten Beispiele:

(i) *Federarbeit* einer Spiralfeder. Dies ist die Energie, welche in einer komprimierten Feder gespeichert ist. Wir nehmen an die Stauchung der Feder findet im linearen Materialbereich der Feder statt, i.e. die Kraft in Abhängigkeit des Weges sei $F(x) = kx$, wobei k die Federkonstante ist. $x = 0$ entspricht der Ruhelage (die Beschreibung einer Streckung ist analog). Die Arbeit ist

$$W = \int_0^b F(x) dx = \int_0^b kx dx = \frac{kb^2}{2}.$$

(ii) *Gravitationsarbeit* Dies ist die Arbeit die von einer Kraft verrichtet werden muss, um einen Körper im Gravitationsfeld der Erde von der Erde weg zu bewegen.

(a) In Erdnähe: Hier gilt $F = mg$, wobei m für die Masse des zu verschiebenden Körpers und g für die Gravitationskonstante (in Erdnähe) steht. Die Arbeit ist

$$W = \int_a^b mg dx = mg(b - a).$$

(b) Allgemein: Hier gilt

$$F = \frac{mM_E}{x^2},$$

wobei M_E für die Masse der Erde und x für den Abstand des betrachteten Körpers zum Schwerpunkt der Erde steht. Wir haben

$$W = \int_a^b \frac{mM_E}{x^2} dx = mM_E \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Bemerkung: Um einen Körper unendlich weit von der Erde weg ($b \to \infty$) zu befördern ist die endliche Energie $W = mM_E/a$ nötig.

2.4. **Bogenlänge einer Kurve.** Sei eine Funktion $f(x)$, definiert auf einem Intervall $[a, b]$, gegeben. Wir interessieren uns für die Länge der Kurve $y = f(x)$, i.e. für die Länge des Graphen der Funktion $f(x)$. Dazu unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleichlange Telintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($x_0 = a$, $x_n = b$). Die Länge dieser Teilintervalle ist $\frac{b-a}{n}$. Nun approximieren wir den Graphen $y = f(x)$ durch Geradenstücke zwischen den Punkten $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ und $(x_i, f(x_i))$ (diese beiden Punkte sind Punkte auf dem Graphen $y = f(x)$). Die Länge L_i des Geradenstücks zwischen $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ und $(x_i, f(x_i))$ ist, nach der Formel von Pytharoas,

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Mit der Notation

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

haben wir

$$\begin{aligned} L_i &= \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ &= \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2}. \end{aligned}$$

Die Länge des approximierten Graphen durch n Geradenstücke ist somit

$$\begin{aligned} L_n = \sum_{i=1}^n L_i &= \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2}, \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile verwendet haben dass wir das Intervall in n gleichlange Teilintervalle der Länge $\frac{b-a}{n}$ unterteilen, i.e. $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Die Form des obigen Ausdrucks ist dem einer Riemannschen Summe ähnlich, jedoch tritt der Term $\Delta y_i / \Delta x_i$ auf. Für diesen Term gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{df}{dx}$$

und somit gilt für die *Bogenlänge des Graphen* $y = f(x)$ im Intervall $[a, b]$

$$L = \lim_{n \to \infty} L_n = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x) \right)^2} dx.$$

Beispiel: Wir berechnen die Länge des Graphen der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ zwischen $x = 1$ und $x = 4$. Wir haben

$$\frac{df}{dx}(x) = (x-1)^{1/2}.$$

Somit

$$
\begin{aligned}
L &= \int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}dx \\
&= \int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{3/2}-1\right) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.
\end{aligned}
$$

2.5. **Durchschnitt.** Der *Durchschnitt einer Funktion* $f(x)$ auf dem Intervall $[a,b]$ ist definert durch

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Beispielsweise ist der Durchschnitt von $f(x)=\sin(x)$ auf dem Intervall $[0,3\pi/2]$

$$\overline{f} = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi/2}\sin(x)dx = -\frac{2}{3\pi}\cos(x)\Big|_0^{3\pi/2} = \frac{2}{3\pi}.$$

3. Integrationsmethoden

3.1. **Substitution.** Wir betrachten unbestimmte Integrale der Form

$$\int f(x)dx = \int \phi(g(x))\frac{dg}{dx}(x)dx,$$

wobei wir die Stammfunktion von $\phi(x)$ kennen. Die Integrale bestehen also aus einer verschachtelten Funktion $\phi(g(x))$ und der Ableitung der inneren Funktion $g(x)$. Da wir die Stammfunktion von ϕ kennen, kennen wir also $\Phi(x)$ so dass

$$\frac{d\Phi}{dx}(x) = \phi(x).$$

Es folgt dann dass

$$\frac{d\Phi}{dx}(g(x)) = \phi(g(x))$$

und somit durch die Kettenregel

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Phi(g(x)) &= \frac{d\Phi}{dx}(g(x))\frac{dg}{dx}(x) \\
&= \phi(g(x))\frac{dg}{dx}(x).
\end{aligned}
$$

I.e. wir können das ursprüngliche Integral schreiben als

$$
\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \phi(g(x))\frac{dg}{dx}(x)dx \\
&= \int \left(\frac{d}{dx}\Phi(g(x))\right)dx \\
&= \Phi(g(x)) + C \\
&= F(x).
\end{aligned}
$$

Das formale Vorgehen für Substitution ist das folgende:

(i) Gesucht ist ein Integral welches in der Form

$$\int f(x)dx = \int \phi(g(x))\frac{dg}{dx}(x)dx$$

vorliegt.

(ii) Wir wählen eine Variable u so dass

$$u = g(x).$$

Daraus folgt

$$\frac{du}{dx} = \frac{dg}{dx}(x), \qquad dx = \frac{1}{\frac{dg}{dx}(x)} du.$$

(iii) Wir setzen diese Ausdrücke in das Integral ein und integrieren:

$$\begin{aligned} \int \phi(g(x)) \frac{dg}{dx}(x) dx &= \int \phi(u) \frac{dg}{dx}(x) \frac{1}{\frac{dg}{dx}(x)} du \\ &= \int \phi(u) du \\ &= \Phi(u) + C \end{aligned}$$

(iv) Wir machen die Rücksubstitution, i.e. wir drücken die vorhandenen u durch x aus und erhalten eine Funktion in Abhängigkeit von x:

$$= F(x).$$

Das Vorgehen ist formal in dem Sinne dass in Schritt (ii) das Auflösen nach dx nur formal geschieht, ein Ausdruck wie dx hat für sich alleine keine Bedeutung, ausser in einer Interpretationen als infinitesimales Längenstück.

Wir illustrieren das Vorgehen an Beispielen.

(i)

$$\int 2x \cos(x^2) dx.$$

Der Term $\cos(x^2)$ ist die verschachtelte Funktion. Wir wählen

$$u = x^2.$$

Es folgt

$$\frac{du}{dx} = 2x, \qquad dx = \frac{du}{2x}.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \int 2x \cos(x^2) dx = \int 2x \cos(u) \frac{du}{2x} &= \int \cos(u) du \\ &= \sin(u) + C \\ &= \sin(x^2) + C, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile rücksubstituiert haben.

(ii)

$$\int e^{3x} dx.$$

Wir wählen

$$u = 3x.$$

Es folgt

$$\frac{du}{dx} = 3, \qquad dx = \frac{du}{3}.$$

Einsetzen ergibt

$$\int e^{3x}dx = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int e^u du$$
$$= \frac{1}{3}e^u + C$$
$$= \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

Die Substitution ist nicht eindeutig. Wir illustrieren am Beispiel

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Wir wählen zwei verschiedene Substitutionen:

(i) $u = \sqrt{1-x^2}$. Es folgt

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}du.$$

Einsetzen ergibt

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int du$$
$$= -u + C$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + C.$$

(ii) $x = \sin(u)$. Es folgt

$$\frac{dx}{du} = \cos(x), \qquad dx = \cos(u)du.$$

Einsetzen ergibt

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sin(u)du$$
$$= -\cos(u) + C$$
$$= -\sqrt{1-\sin^2(u)} + C$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Bemerkung: Wir lassen hier das Problem der Bijektivität und der Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen ausser acht, i.e. wir betrachten nur das Intervall auf welchem $x = \sin(u)$ bijektiv ist und $\cos(x) > 0$.

3.1.1. *Beispiele zu Substitution mit Grenzen (bestimmtes Integral).* Wir betrachten zwei Beispiele. Im ersten Beispiel ist die Kreisfläche eines Kreises mit Radius r gesucht. Wir setzen den Ursprung des Kreies in den Ursprung der x-y-Ebene und berechnen die Fläche im ersten Quadranten, i.e. wir berechnen die Fläche eines Viertelkreises. Diese Fläche ist die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, i.e.

$$A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

Wir verwenden die Substitution

$$x = r\sin(u), \qquad dx = r\cos(u)du.$$

Die Grenzen werden substituiert, indem man sich die Grenzen für die x-Werte betrachtet (diese sind $x_1 = 0$, $x_2 = r$) und dann die zugehörigen u-Werte mit der Substitutionsgleichung berechnet:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, \text{ der dazugehörige Wert von } u \text{ ist } u_1 = \arcsin(0) = 0, \\
x_2 &= r, \text{ der dazugehörige Wert von } u \text{ ist } u_2 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(Wir sehen dass die u-Werte im Intervall $[0, \pi/2]$ liegen, in diesem Intervall ist $x = r\sin(u)$ eindeutig lösbar). Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2(u) du
\end{aligned}$$

(wir benutzen in der zweiten Zeile dass $\cos(u)$ im betrachteten Intervall $u \in [0, \pi/2]$ positiv ist). Für das Integral verwenden wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx.$$

Dies gilt da $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$. Wegen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(x) + \cos^2(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

folgt[5]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

Somit ist die Fläche

$$A = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du = r^2 \frac{\pi}{4}$$

und die Kreisfläche ist wie erwartet $A_{\text{Kreis}} = r^2\pi$.

Als zweites Beispiel betrachten wir einen Wechselstrom $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ welcher an einem Ohmschen Widerstand anliegt und fragen nach dem Gleichstrom I_{eff}, welcher im zeitlichen Mittel die selbe Leistung an den Ohmschen Widerstand abgibt. Die Leistung P ist gegeben durch

$$P = UI = I^2 R,$$

wobei U die anliegende Spannung und R den Ohmschen Widerstand bezeichnen. Während einer Periodendauer T wird die folgende Arbeit W an den Ohmschen Widerstand abgegeben:

(i) Gleichstrom:

$$W = PT = I_{\text{eff}}^2 RT. \tag{1}$$

(ii) Wechselstrom:

$$W = \int_0^T P(t) dt = \int_0^T I(t)^2 R dt. \tag{2}$$

[5] Wir werden diese Integrale später analytisch mit der Methode der Partiellen Integration berechnen.

Für im zeitlichen Mittel gleiche Leistungsabgabe muss gelten (1) = (2). Daraus folgt

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I(t)^2 dt}.$$

Für das Integral

$$\int_0^T I(t)^2 dt = I_0^2 \int_0^T \sin^2(\omega t) dt$$

verwenden wir die Substitution

$$u = \omega T, \qquad dt = \frac{1}{\omega} du, \qquad t_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0, \quad t_2 = T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow u_2 = 2\pi.$$

Einsetzen ergibt

$$\int_0^T I(t)^2 dt = I_0^2 \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{I_0^2}{\omega}\int_0^{2\pi} \sin^2(u) du = \frac{I_0^2 \pi}{\omega} = \frac{I_0^2 T}{2}.$$

Für die dritte Gleichung siehe die obige Aufgabe zur Flächenberechnung des Kreises. Die vierte Gleichung ist Rücksubstitution. Es folgt

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Diesen Wert I_{eff} nennt man auch den RMS-Wert des Stromes $I(t)$. Allgemein definiert man den *quadratischen Mittelwert* einer periodischen Funktion $f(t)$ mit Periodendauer T als

$$f_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt}.$$

3.2. **Partielle Integration.** Aus der Produktregel

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df}{dx}(x)g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}(x)$$

erhalten wir durch umstellen

$$f(x)\frac{dg}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) - \frac{df}{dx}(x)g(x).$$

Unbestimme Integration dieser Gleichung ergibt

$$\int f(x)\frac{dg}{dx}(x)dx = f(x)g(x) - \int \frac{df}{dx}(x)g(x)dx.$$

Dies ist die Formel für *partielle Integration.* Kompakt aufgeschrieben mit der $'$-Schreibweise $(f'(x) = \frac{df}{dx}(x))$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Beispiele:

(i) Wir betrachten

$$\int x\cos(x)dx.$$

Wir wählen $f(x) = x$ und $g'(x) = \cos(x)$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= x &&\to \quad f'(x) = 1,\\ g'(x) &= \cos(x) &&\to \quad g(x) = \sin(x). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Formel für partielle Integration ($\int fg' = fg - \int f'g$)

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)dx &= x\sin(x) - \int \sin(x)dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

(ii) Wir betrachten

$$\int xe^x dx.$$

Wir wählen $f(x) = x$ und $g'(x) = e^x$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= x && \to && f'(x) = 1, \\ g'(x) &= e^x && \to && g(x) = e^x. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Formel für partielle Integration ($\int fg' = fg - \int f'g$)

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^x(x-1) + C.\end{aligned}$$

(iii) Wir betrachten

$$\int x^2 e^x dx.$$

Wir wählen $f(x) = x^2$ und $g'(x) = e^x$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 && \to && f'(x) = 2x, \\ g'(x) &= e^x && \to && g(x) = e^x. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Formel für partielle Integration ($\int fg' = fg - \int f'g$)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2\int xe^x dx \\ &= x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C \\ &= e^x(x^2 - 2(x-1)) + C,\end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Zeile das Resultat des vorhergehenden Beispiels verwendet haben (wir haben also zweimal partiell integriert).

(iv) Wir betrachten

$$\int \log(x) dx.$$

Wir wählen $f(x) = \log(x)$ und $g'(x) = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(x) && \to && f'(x) = \frac{1}{x}, \\ g'(x) &= 1 && \to && g(x) = x. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Formel für partielle Integration ($\int fg' = fg - \int f'g$)

$$\begin{aligned}\int \log(x) dx &= x\log(x) - \int \frac{1}{x} x dx \\ &= x\log(x) - x + C \\ &= x(\log(x) - 1) + C.\end{aligned}$$

(v) Wir betrachten

$$\int \sin^2(x)dx.$$

Wir wählen $f(x) = \sin(x)$ und $g'(x) = \sin(x)$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) &\rightarrow \quad f'(x) &= \cos(x), \\ g'(x) &= \sin(x) &\rightarrow \quad g(x) &= -\cos(x). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Formel für partielle Integration ($\int fg' = fg - \int f'g$)

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x)dx &= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \sin^2(x))dx \\ &= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx. \end{aligned}$$

Nun bringen wir den Term $\int \sin^2(x)dx$ auf die linke Seite der Gleichung. Wir haben

$$2\int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cos(x) + x + C.$$

Somit finden wir

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(-\sin(x)\cos(x) + x\right) + C.$$

Bemerkung: Die Konstante kann man innerhalb der Klammer (i.e. $\ldots = \frac{1}{2}(\ldots + C)$) oder ausserhalb der Klammer (i.e. $\ldots = \frac{1}{2}(\ldots) + C$) schreiben. Da $C \in \mathbb{R}$ ist dies äquivalent.

Eine analoge Formel gilt für die partielle Integration mit Grenzen, i.e. für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^x dx &= xe^x\Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx \\ &= 2e^2 - e^x\Big|_0^2 \\ &= 2e^2 - (e^2 - 1) \\ &= e^2 + 1. \end{aligned}$$

3.3. **Integration von rationalen Funktionen.**

3.3.1. *Partialbruchzerlegung.* Wir addieren zwei Brüche indem wir den gemeinsamen Nenner bestimmen

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+1} &= \frac{3(x+1) + 5(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{8x-7}{x^2 - x - 2}. \end{aligned}$$

Uns interessiert nun die Umkehrung dieses Prozesses, i.e. die Vereinfachung eines Bruchterms durch Zerlegung in mehrere Brüche von einfacherer Form. Wir illustrieren die einzelnen Schritte des Vorgehens am Beispiel

$$\frac{8x-7}{x^2-x-2}.$$

(i) Wir gehen von einem echt gebrochenen Bruch aus, i.e. wir nehmen an die Ordnung des Polynoms im Zähler ist niedriger als die Ordnung des Polynoms im Nenner. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt so führen wir eine Polynomdivision durch um die Voraussetzung zu erfüllen. Beim betrachteten Beispiel handelt es sich um einen echt gebrochenen Bruch.

(ii) Wir zerlegen den Nenner in Linearfaktoren. Dazu werden die Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmt:

$$x^2-x-2=0 \quad \rightarrow \quad x_1=2, \quad x_2=-1.$$

Die Zerlgeung des Nenners in Linearfaktoren ist

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

und wir haben

$$\frac{8x-7}{x^2-x-2}=\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}.$$

(iii) Wir machen den Ansatz

$$\frac{8x-7}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$$

und multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite. Dies ergibt

$$8x-7=A(x+1)+B(x-2).$$

(iv) Nun finden wir die Konstanten A, B indem wir x-Werte in diese Gleichung einsetzen. Diese x-Werte können beliebig gewählt werden. Vorteilhaft sind x-Werte die den Nullstellen des Nennerpolynoms entsprechen:

$$\begin{array}{llll} x=-1 & \rightarrow & -15=-3B & \rightarrow \quad B=5, \\ x=2 & \rightarrow & 9=3A & \rightarrow \quad A=3. \end{array}$$

(v) Einsetzen in Ansatz ergibt

$$\frac{8x-7}{x^2-x-2}=\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x+1}.$$

Man nennt dieses Verfahren *Partialbruchzerlegung* und die auftretenden Brüche auf der rechten Seite der Gleichung *Partialbrüche*.

An einem weiteren Beispiel illustrieren wir die *Situation bei mehrfachen Nullstellen*. Wir betrachten

$$\frac{5x^2-31x+53}{x^3-9x^2+24x-16}$$

und setzen $x_1=4$ als Nullstelle des Nenners voraus (dies kann durch Einsetzen überprüft werden). Wie im vorhergehenden Beispiel führen wir die einzelnen Schritte der Partialbruchzerlegung durch:

(i) Der gegebene Bruch ist echt gebrochen.

(ii) Wir bestimmen die Nullstellen des Nenners. Division durch den Linearfaktor der gegebenen Nullstelle $x_1 = 4$ mittels Polynomdivision ergibt

$$(x^3 - 9x^2 + 24x - 16) : (x - 4) = 4 - 5x + x^2.$$

Die Nullstellen des verbleibenden Polynoms sind $x_2 = 4$, $x_3 = 1$. Somit ist $x_{1,2} = 4$ eine doppelte Nullstelle und $x_3 = 1$ eine einfache Nullstelle des Nenners. Die Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren ist somit

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = (x - 1)(x - 4)^2$$

und wir haben

$$\frac{5x^2 - 31x + 53}{x^3 - 9x^2 + 24x - 16} = \frac{5x^2 - 31x + 53}{(x - 1)(x - 4)^2}.$$

(iii) Wir machen den Ansatz

$$\frac{5x^2 - 31x + 53}{(x - 1)(x - 4)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 4} + \frac{C}{(x - 4)^2}.$$

Man beachte dass die erste und zweite Potenz des Linearfaktors der doppelten Nullstelle als Nenner Auftreten. Allgemein treten bei einer n-fachen Nullstelle alle Potenzen bis und mit der n-ten Potenz des Linearfaktors dieser Nullstelle als Nenner auf. Wir multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite

$$5x^2 - 31x + 53 = A(x - 4)^2 + B(x - 1)(x - 4) + C(x - 1).$$

(iv) Wir setzen x-Werte ein:

$$\begin{array}{lcll} x = 1 & \to & 27 = 9A & \to \quad A = 3, \\ x = 4 & \to & 9 = 3C & \to \quad C = 3, \\ x = 0 & \to & 53 = 16A + 4B - C & \to \quad B = 2. \end{array}$$

Die ersten beiden x-Werte sind naheliegend, da sie den Nullstellen des Nenners entsprechen. Der dritte x-Wert wurde gewählt da sich dadurch einfache Ausdrücke ergeben.

(iv)* Als Alternative zum Einsetzen von x-Werten kann man auch einen *Koeffizientenverleich* durchführen: Sei eine Gleichung mit einer Unbekannten x gegeben, so dass die linke und rechte Seite ein Polynom in x sind. Beim Koeffizientenverleich werden die Vorfaktoren (dies sind die Koeffizienten) vor jeder Potenz von x der linken mit der rechten Seite verglichen. In unserem Fall ist die Gleichung

$$\begin{aligned} 5x^2 - 31x + 53 &= A(x - 4)^2 + B(x - 1)(x - 4) + C(x - 1) \\ &= (A + B)x^2 + (-8A - 5B + C)x + 16A + 4B - C. \end{aligned}$$

Der Koeffizient vor x^2 ist auf der linken Seite 5 und auf der rechten Seite $A+B$. Der Koeffizient vor x^1 ist auf der linken Seite -31 und auf der rechten Seite $-8A - 5B + C$. Der Koeffizient vor x^0 ist auf der linken Seite 53 und auf der rechten Seite $-C$. Das Gleichsetzen dieser Koeffizienten ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrrr} 5 &=& A &+ B & \\ -31 &=& -8A &- 5B &+ C \\ 53 &=& & &- C \end{array} \right.$$

Die Lösung davon ist $A = 3$, $B = 2$, $C = 3$.

Das Verfahren des Koeffizientenvergleichs beruht darauf dass zwei Polynome gleich sind, genau dann wenn die jeweiligen Koeffizienten gleich sind. Beweis: Seien $P_1(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $P_2(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$. Nun sei $P_1(x) = P_2(x)$, i.e. $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$ vorausgesetzt. Diese Gleichung muss für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig sein, insbesondere für $x = 0$. Setzt man in dieser Gleichung nun $x = 0$ so folgt $a_0 = b_0$ (alle anderen Terme verschwinden). Somit kann man diesen Term subtrahieren und erhält die neue Gleichung $a_n x^n + \ldots + a_1 x = b_n x^n + \ldots + b_1 x$. Diese Gleichung ist durch x teilbar und man erhält nach Division durch x die Gleichung $a_n x^{n-1} + \ldots + a_2 x + a_1 = b_n x^{n-1} + \ldots + b_2 x + b_1$. Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$ erhält man $a_1 = b_1$. Das Verfahren lässt sich nun fortführen und man erhält $a_i = b_i$ für $0 \leq i \leq n$. Die Umkehrung ist evident, da bei gleichen Koeffizienten die Polynome gleich sind.

(iv) Einsetzen der gefundenen Werte für A, B und C in den Ansatz ergibt das Resultat

$$\frac{5x^2 - 31x + 53}{x^3 - 9x^2 + 24x - 16} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x-4} + \frac{3}{(x-4)^2}.$$

Bemerkung zum Ansatz bei mehrfachen Nullstellen: Für jede Nullstelle des Nenners treten im Ansatz die folgenden Summanden auf:

$$\begin{aligned}
&x_1 \text{ eine einfache Nullstelle.} && \to \quad \frac{A}{x - x_1} \\
&x_1 \text{ doppelte Nullstelle.} && \to \quad \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} \\
&x_1 \text{ dreifache Nullstelle.} && \to \quad \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \frac{A_3}{(x - x_1)^3} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

3.3.2. *Integration von rationalen Funktionen.* Die erhaltenen Partialbrüche aus der Partialbruchzerlegung lassen sich elementar integrieren. Dies wird nun zur Integration von rationalen Funktionen verwendet. Wir illustrieren an einem Beispiel:

$$\int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} dx.$$

Wir führen für den Bruch im Integral die Partialbruchzerlegung durch.

(i) Polynomdivision ergibt

$$(2x^3 - 14x^2 + 14x + 30)(x^2 - 4) = 2x - 14 + \frac{22x - 26}{x^2 - 4}.$$

Im weiteren betrachten wir nur den echt gebrochenen Anteil.

(ii) Aus $x^2 - 4 = 0$ folgen die Nullstellen des Nenners: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Die Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren ist somit $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$.

(iii) Wir machen den Ansatz

$$\frac{22x - 26}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

Multiplizieren des Nenners ergibt

$$22x - 26 = A(x + 2) + B(x - 2).$$

(iv) Einsetzen der x-Werte $x = 2$ und $x = -2$ ergibt $A = \frac{9}{2}$, $B = \frac{35}{2}$.

(v) Somit gilt

$$\frac{22x-26}{x^2-4} = \frac{9}{2(x-2)} + \frac{35}{2(x+2)}.$$

Wir können somit das gegeben Integral umschreiben:

$$\int \frac{2x^3-14x^2+14x+30}{x^2-4} dx = \int \left(2x - 14 + \frac{9}{2(x-2)} + \frac{35}{2(x+2)} \right) dx.$$

Unter Verwendung der Integrale

$$\int (2x-14)dx = x^2 - 14x + C,$$
$$\int \frac{1}{x-2} dx = \log(x-2) + C,$$
$$\int \frac{1}{x+2} dx = \log(x+2) + C,$$

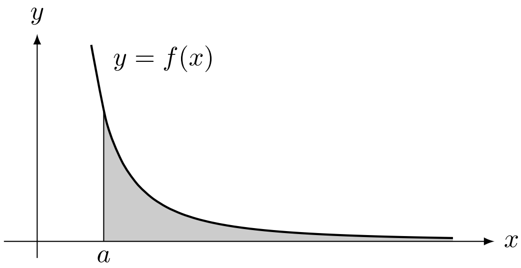
erhalten wir das Resultat

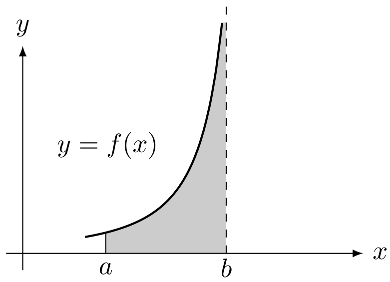
$$\int \frac{2x^3-14x^2+14x+30}{x^2-4} dx = x^2 - 14x + \frac{9}{2}\log(x-2) + \frac{35}{2}\log(x+2) + C.$$

(wir haben die drei Konsten C zu einer neuen Konstante zusammengefasst, welche wir wieder als C bezeichnen).

3.4. Uneigentliche Integrale. *Ungeigentliche Integrale* sind von der Form

(i) $\int_a^\infty f(x)dx,$ (ii) $\int_a^b f(x)dx, \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty.$





Wir definieren diese Integrale durch

(i)

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

(ii) Für $f(x)$ mit $\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

(Wobei die Notation $c \to b^-$ bedeutet dass wir den linksseitigen Grenzwert betrachten und $\ldots := \ldots$ ist die Notation durch welche die linke Seite durch die rechte Seite definiert ist).

Bemerkungen:

(i) Falls die obigen Grenzwerte existieren heissen die Integrale *konvergent*, ansonsten *divergent*.

(ii) Analog zu den obigen Definitionen werden Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx, \quad \text{mit} \quad \lim_{x\to a^+} |f(x)| = \infty$$

definiert.

(iii) Gibt es mehrere singuläre Punkte dann wird das uneigentliche Integral als Summe von elementaren (i.e. mit nur einem singulären Punkt) uneigentlichen Integrale geschrieben. Das Integral konvergiert nur dann wenn jedes Integral der Summe konvergiert.

Beispiele:

(i)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Es handelt sich um ein konvergentes Integral.

(ii)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \log(x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} (\log(b) - \log(1)) = \lim_{b\to\infty} \log(b) = \infty.$$

Dieses Integral ist divergent.

(iii)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x}dx.$$

Wir schreiben dieses uneigentliche Integral als Summe von uneigentlichen Integralen:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x}dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}dx.$$

Die Wahl der Grenzen -1 und 1 ist willkürlich, sie dienen nur dazu die singulären Punkte zu trennen. Wie bereits gesehn divergiert das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$, somit divergiert auch $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x}dx$.

4. Funktionen von mehreren Variablen

Bis zu diesem Punkt wurde der Funktionsbegriff für Zuordnungen der Form $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$ mit $D \subset \mathbb{R}$ verwendet, i.e. für eine (eindeutige) Zuordnung in welcher einer reellen Zahl $x \in D$ (wobei D für den Definitionsbereich der Funktion f steht) eine reelle Zahl y zugeordnet wird. Solche Funktionen bezeichnet man auch als *Funktion einer Variablen* (hier x). Im folgenden erweitern wir den Funktionsbegriff auf *Funktionen von mehreren Variablen* und entwickeln dazu die Differential- und Integralrechnung. Der Grossteil der Betrachtungen findet an Hand von Funktionen von zwei Variablen statt, da im allgemeinen nur dieser Fall eine grafische Darstellung besitzt.

4.1. Funktionen von zwei Variablen.

4.1.1. *Grundbegriffe.* Eine *Funktion f von zwei Variablen* ist eine eindeutige Zuordnung welche einem Element (x, y) im Definitionsbereich der Funktion eine reelle Zahl z zuordnet. I.e.

$$\begin{aligned} &f : D \to \mathbb{R} \\ &(x, y) \mapsto z = f(x, y). \end{aligned}$$

Hier steht D für den Definitionsbereich der Funktion. Es gilt $D \subset \mathbb{R}^2$. Wobei[6]

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ &= \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Menge aller reellen geordneten Paare } (x, y) \\ &= \text{Menge aller reellen 2-Tupel} \\ &= \text{Menge aller Punkte in der } x\text{-}y\text{-Ebene.} \end{aligned}$$

Geometrisch betrachtet ist der Definitionsbereich einer Funktion von zwei Variablen eine Teilmenge der x-y-Ebene.

Beispiele:

(i) Die Spannung als Funktion von Widerstand R und Strom I:

$$U = f(R, I) = RI.$$

(ii)

$$f(x, y) = \log(x + y).$$

(iii) Volumen eines Zylinders der Höhe h und Radius r:

$$V = f(r, h) = r^2 \pi h.$$

Oberfläche des selben Zylinders:

$$O = g(r, h) = 2\pi r h.$$

Im folgenden ist mit dem *Definitionsbereich* jeweils der grösstmögliche Definitionsbereich gemeint, i.e. diejenige Teilmenge der x-y-Ebene welche als Argumente der Funktion zu reellen Funktionswerten führen. Als *Wertebereich* der Funktion f bezeichnet man die Teilmenge von $\mathbb{R}$ welche alle möglichen Funktionswerte der Funktion f enthält.

Als Beispiel untersuchen wir den Definitions- und Wertebereich der Funktion

$$f(x, y) = \log(36 - 4x^2 - 9y^2).$$

[6] $\times$ bezeichnet hier das kartesische Produkt von Mengen.

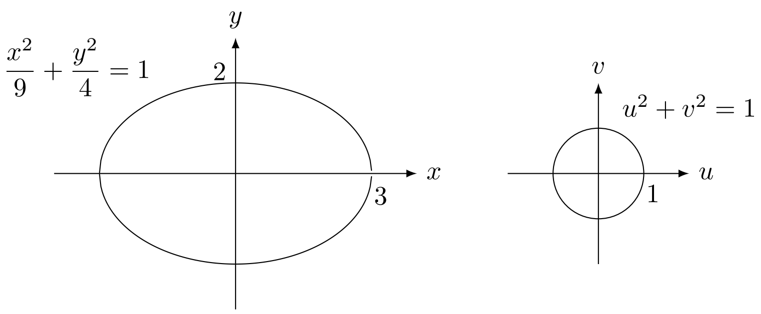
Der Logarithmus ist nur für positive reelle Zahlen definiert, somit benötigen wir $36 - 4x^2 - 9y^2 > 0$, i.e. der Definitionsbereich ist gegeben durch

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1 \right\}.$$

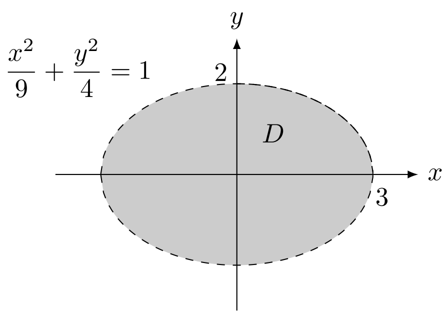
Zur geometrischen Untersuchung des Definitionsbereichs als Teilmenge der x-y-Ebene betrachten wir die Kurve

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Einführen der Koordinaten $u = x/3$ und $v = y/2$ ergibt die Kurve $u^2 + v^2 = 1$. Somit ist die gesuchte Kurve, auf u-v-Koordinaten transformiert ein Kreis mit Radius 1 am Ursprung. Die Koordinatentransformation von x, y Koordinaten auf u, v Koordinaten besteht nur aus einer Multiplikation mit konstanten Faktoren. Diese Transformation ist somit eine Streckung/Stauchung des Koordinatensystems. Bei der gesuchten Kurve in x-y-Koordinaten handelt es sich somit um einen gestreckten/gestauchten Kreis. Dies ist eine *Ellipse*.



Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen finden sich durch setzen von $x = 0$ (dadurch ergibt sich $y = \pm 2$) und $y = 0$ (dadurch ergibt sich $x = \pm 3$). Somit handelt es sich bei der gesuchten Kurve um eine Ellipse am Ursprung mit *Halbachsen* 3 und 2. Die Halbachsen sind parallel zu den Koordinatenachsen. Diese Kurve ist die Berandung des Definitionsbereichs und innerhalb dieser Kurve befinden sich die Punkte für welche das Argument des Logarithmus, i.e. $36 - 4x^2 - 9y^2$, grösser als Null ist. Der Definitionsbereich der Funktion $f(x,y) = \log(36 - 4x^2 - 9y^2)$ ist somit das Innere der betrachteten Ellipse:



Als Konvention zeichnen wir Berandungen von Gebieten die nicht zum Gebiet gehören gestrichelt.

Bemerkung: Allgemein ist eine Gleichung der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit $a, b > 0$ eine Ellipse mit Halbachsen a und b.

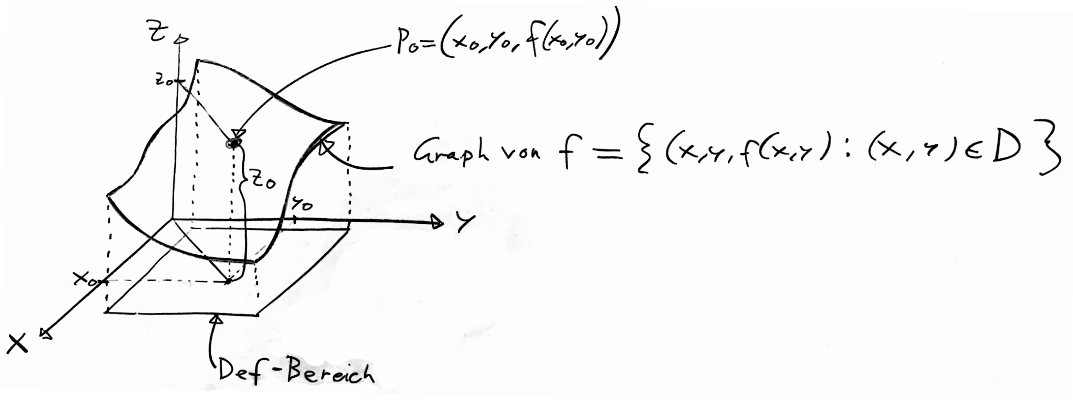
Zur Bestimmung des Wertebereichs untersuchen wir zuerst die möglichen Werte des Arguments des Logarithmus i.e. die möglichen Werte von $36 - 4x^2 - 9y^2$. Der maximale Wert liegt bei $(x, y) = (0, 0)$ (also am Ursprung) und beträgt 36. Je näher (x, y) dem Rand des Definitionsbereichs kommt, desto kleiner (aber positiv) wird der Ausdruck $36 - 4x^2 - 9y^2$. Somit liegen die möglichen Werte von $36 - 4x^2 - 9y^2$ im Intervall $(0, 36]$ (Der Wert 0 ist nicht dabei da dieser Wert auf dem Rand der Ellipse angenommen wird, welcher nicht zum Definitionsbereich gehört). Da die Logarithmusfunktion streng monoton wachsend ist, ist der Wertebereich von f:

$$W = (-\infty, \log(36)].$$

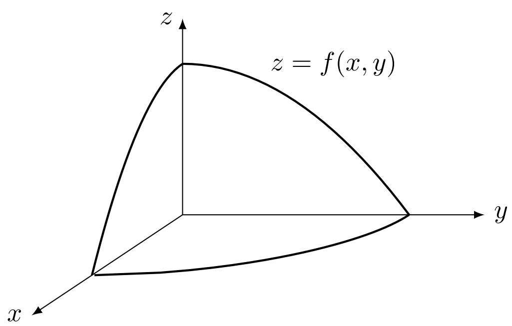
4.2. **Grafische Darstellung.** Sei eine Funktion $f(x, y)$ gegeben. Der *Graph der Funktion* $f(x, y)$ ist gegeben durch

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}.$$

Dies ist eine Teilmenge des dreidimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$. Geometrisch konstruiert man den Graph der Funktion $f(x, y)$ wie folgt. Für einen Punkt (x_0, y_0) im Definitionsbereich trägt man vom Punkt $(x_0, y_0, 0)$ (dieser Punkt liegt in der x-y-Ebene) die Strecke $|z_0| = |f(x_0, y_0)|$ in vertikaler Richtung (also in Richtung der z-Achse) nach oben, falls $z_0 > 0$ oder nach unten, falls $z_0 < 0$, ab. Der Punkt den man erhält besitzt die Koordinaten (x_0, y_0, z_0), wobei $z_0 = f(x_0, y_0)$. Führt man diese Konstruktion für jeden Punkt im Definitionsbereich D der Funktion $f(x, y)$ durch, erhält man den Graphen von $f(x, y)$. Der Graph ist eine Fläche:



Man kann sich den Graph einer Funktion als Fläche vorstellen und den Definitionsbereich als Projektion dieser Fläche auf die x-y-Ebene. Für die Erläuterung von weiteren Konzepten verwenden wir das folgende Bild, welches den Graphen einer Funktion $f(x, y)$ darstellt:

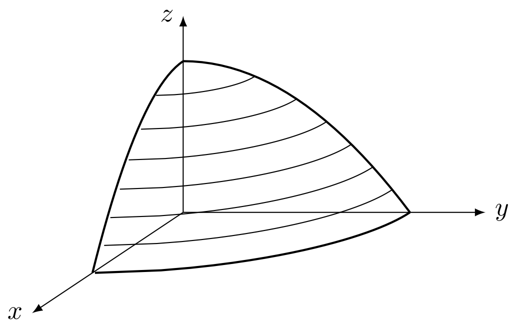


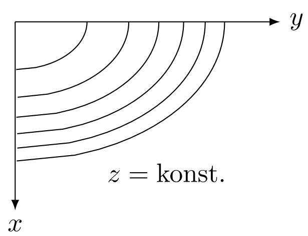
4.2.1. *Rotationssymmetrische Funktionen.* Funktionen vom Typ $f(\sqrt{x^2+y^2})$ sind *rotationssymmetrisch*. Für eine geometrische Betrachtung solcher Funktionen setzt man $y=0$ und studiert die verbleibende Funktion für $x>0$. Die so erhaltene Kurve wird dann um die z-Achse rotiert und erzeugt so den rotationssymmetrischen Graphen $z=f(x,y)$.

4.2.2. *Höhenlinien.* Sei eine Funktion $f(x,y)$ gegeben. *Höhenlinien* sind Teilmengen der x-y-Ebene, gegeben durch

$$f(x,y)=C,$$

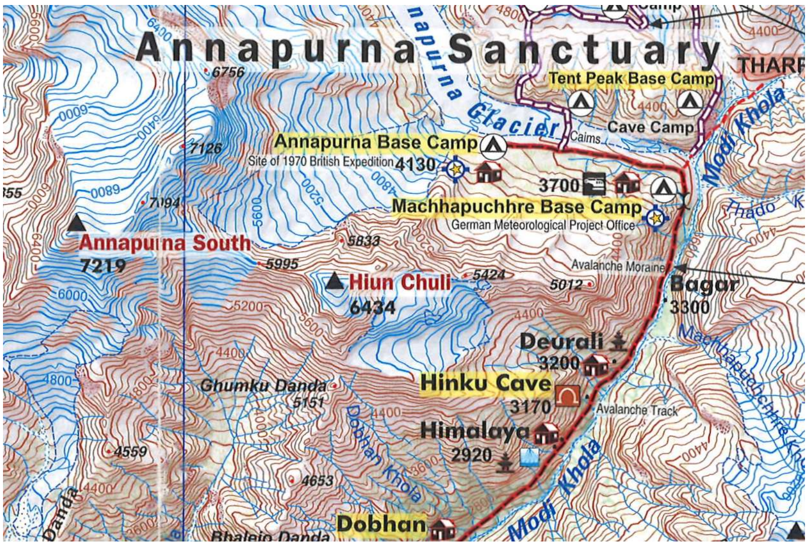
wobei $C \in W$ eine Konstante ist. Die Höhenlinien sind also Schnitte des Graphen parallel zur x-y-Ebene. Die Wahl von verschiedenen Konstanten ergibt verschiedene Höhenlinien.





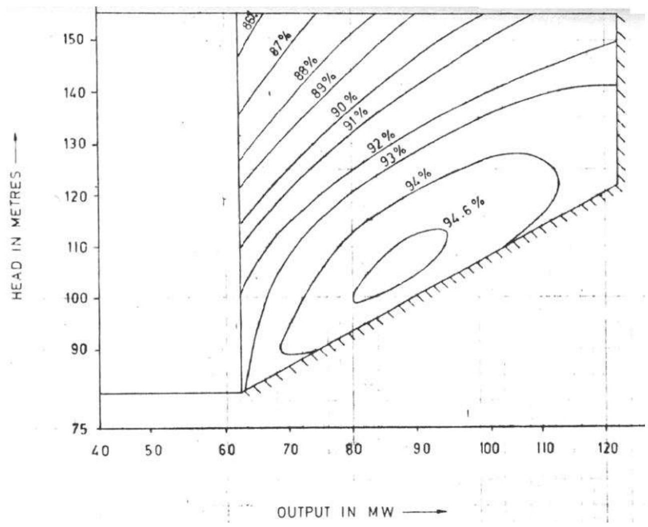
Beispielsweise sind die Höhenlinien der Funktion $f(x,y)=x^2+y^2$ gegeben durch $x^2+y^2=C$. Dies sind Kreise um den Ursprung mit Radius $\sqrt{C}$ (wir haben $0 \leq C \in W$).

Das Konzept der Höhenlinien ist von *topographischen Karten* her bekannt. Untenstehend ist ein Ausschnitt einer topographischen Karte gezeigt.



Die Höhenlinien sind blau (im Gletschergebiet) und braun. Diejenigen blauen Linien welche senkrecht zu den Höhenlinien verlaufen markieren Flüsse (siehe später). Im Falle von topographischen Karten werden die verschiedenen Konstanten C, welche zum zeichnen der Höhenlinien verwendet werden, mit gleichem Abstand gewählt, um eine noch genauere Aussage zum Geländeverlauf aufgrund der Höhenlinien zu machen: An Orten an welchen die Höhenlinien dicht beieinander liegen steigt das Gelände stark an, an Orten wo die Höhenlinien weit auseinander liegen ist das Gelände flach.

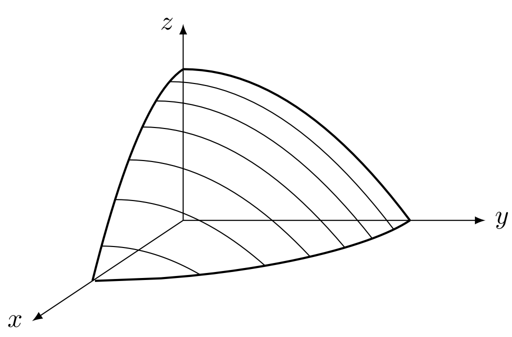
Ein Anwendungsbeispiel aus der Technik ist der Wirkungsgrad einer Turbine in Abhängigkeit der Fallhöhe des Wassers ('HEAD IN METERS') und abgegebener Leisung ('OUTPUT IN MW'), wie in untenstehender Grafik gezeigt.

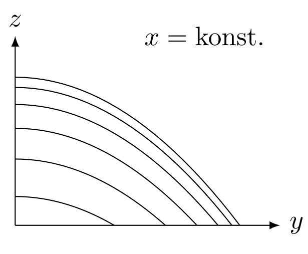


Die (hier schraffierten) Grenzen des Definitionsbereichs sind gegeben durch: Betriebsgrenzen Generator, Vibrationen,....

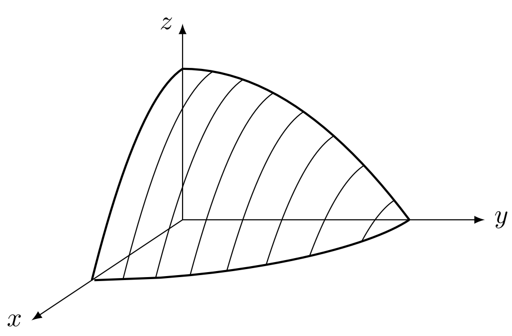
4.2.3. *Schnittkurven.*

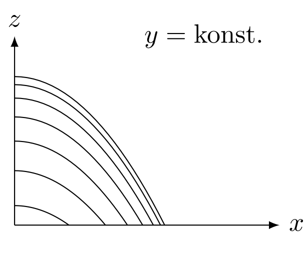
(i) Schnittkurven parallel zur y-z-Ebene sind gegeben durch setzen von $x = C$ in der Gleichung $z = f(x, y)$.





(ii) Schnittkurven parallel zur x-z-Ebene sind gegeben durch setzen von $y = C$ in der Gleichung $z = f(x, y)$.





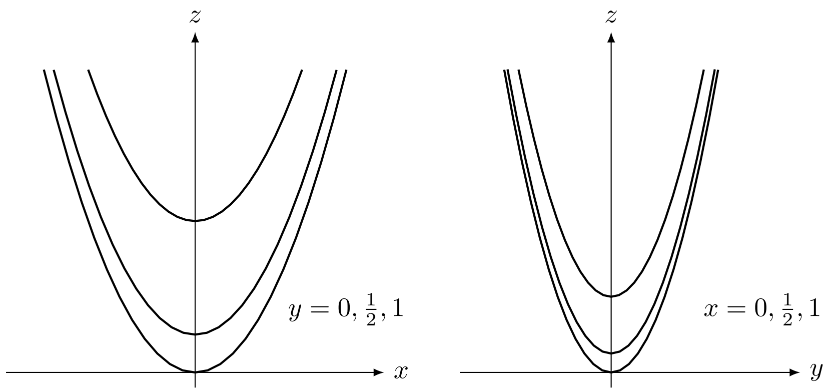
Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x,y) = x^2+2y^2$. Die Schnittkurven parallel zur x-z-Ebene sind gegeben durch

$$z = x^2 + 2C^2, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R},$$

i.e. die Schnittkurven von $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ parallel zur x-z-Ebene sind nach oben geöffnete Normalparabeln, deren Scheitelpunkte wegen $2C^2 \geq 0$ auf der positiven z-Achse liegen. Die Schnittkurven parallel zur y-z-Ebene sind gegeben durch

$$z = C^2 + 2y^2, \quad \text{mit } C \in \mathbb{R},$$

i.e. die Schnittkurven von $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ parallel zur y-z-Ebene sind nach oben geöffnete Parabeln, deren Schteitelpunkte wegen $C^2 \geq 0$ auf der positiven z-Achse liegen. In der folgenden Figur sind die Schnittkurven für $C = 0, \frac{1}{2}, 1$ gezeichnet.



4.2.4. *Funktionen von drei Variablen. Funktionen von drei Variablen* sind Funktionen vom Typ

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto w = f(x,y,z), \end{aligned}$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^3$ (i.e. der Definitionsbereich D ist eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes).

Als Anwendung kann man sich die Temperaturverteilung in einem Zimmer vorstellen, wobei die Funktion

$$\begin{aligned} T : D &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto T(x,y,z) \end{aligned}$$

jedem Punkt im Zimmer mit Koordinaten $(x,y,z) \in D \subset \mathbb{R}^3$ die Temperatur $T(x,y,z) \in \mathbb{R}$ an diesem Punkt zuordnet.

Beispiele: (wobei wir die Funktionsgleichung $w = f(x,y,z)$, den Definitionsbereich D und den Wertebereich W angeben).

(i) $w = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $D = \mathbb{R}^3$, $W = [0,\infty)$.
(ii) $w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, $D = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$, $W = (0,\infty)$.
(iii) $w = xy\log(z)$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, $W = \mathbb{R}$.

Im Gegensatz zu Funktionen von zwei Variablen ist eine grafische Darstellung für Funktionen von drei Variablen nicht direkt möglich.[7] Jedoch ist es möglich die Niveauflächen darzustellen. Die *Niveauflächen* sind gegeben durch

$$f(x, y, z) = C,$$

wobei $C \in W$ ein Konstante ist. (die Niveauflächen sind analog zu den Höhenlinien im Fall einer Funktion von zwei Variablen). Als Beispiel betrachten wir die Niveauflächen der Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Wir setzen

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C$$

Daraus folgt

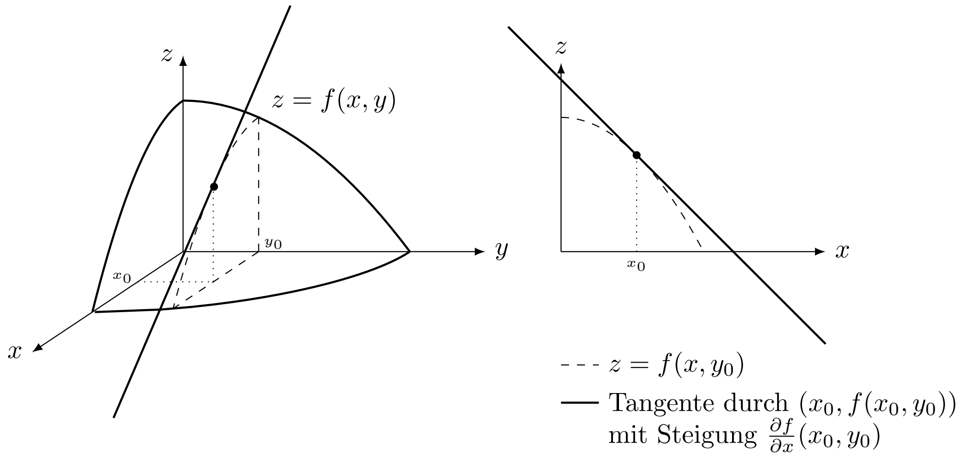
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{C^2}.$$

Dies ist die Gleichung einer Kugeloberfläche, die Kugel hat den Ursprung als Zentrum und Radius $R = 1/C$, i.e. die Niveauflächen von f sind Kugeloberflächen mit Zentrum am Ursprung.

4.3. **Partielle Ableitung.** Sei eine Funktion $f(x, y)$ gegeben. Wir betrachten einen Punkt (x_0, y_0) im Definitionsbereich von $f(x, y)$ und studieren die Änderung der Funktion $f(x, y)$ bei festem $y = y_0$ in Abhängigkeit der Variablen x. Dazu schränken wir die Funktion $f(x, y)$ auf $y = y_0$ ein. Grafisch gesehen betrachten wir somit die Schnittkurve $z = f(x, y_0)$. Die Funktion $f(x, y_0)$ ist nun eine Funktion einer Variablen. Analog zur Definition der Ableitung für Funktionen von einer Variablen definieren wir nun die *partielle Ableitung* von $f(x, y)$ nach der Variablen x im Punkt (x_0, y_0) als

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

falls dieser Grenzwert existiert. Grafisch gesehen entspricht dieser Ausdruck der Steigung der Schnittkurve $z = f(x, y_0)$ im Punkt $(x_0, f(x_0, y_0))$



[7]Damit ist gemeint dass es keine grafische Darstellung für den Graphen von Funktionen von drei Variablen gibt. Der Graph von $f(x, y, z)$ ist gegeben durch

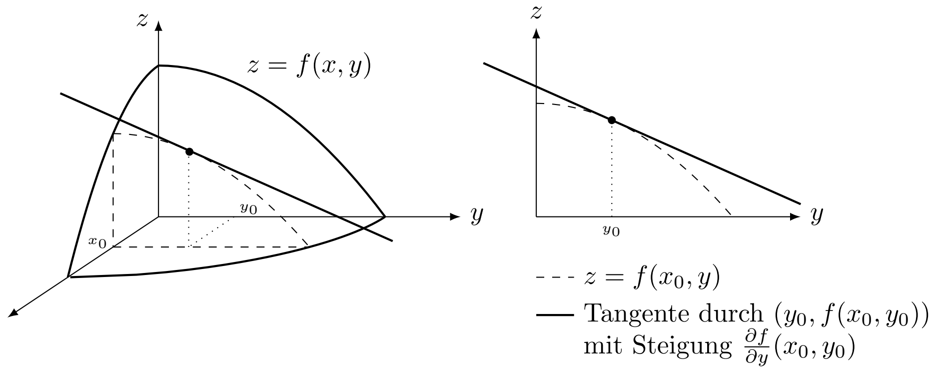
$$\left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x, y, z)\right\}.$$

Somit ist der Graph eine Teilmenge des vierdimensionalen Raumes.

Analog dazu definieren wir die *partielle Ableitung* von $f(x,y)$ nach der Variablen y im Punkt (x_0, y_0) als

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

falls dieser Grenzwert existiert. Grafisch gesehen entspricht dieser Ausdruck der Steigung der Schnittkurve $z = f(x_0, y)$ im Punkt $(y_0, f(x_0, y_0))$



Bemerkungen:

(i) Die Berechnung von partiellen Ableitungen wird somit zurückgeführt auf die Berechnung von gewöhnlichen Ableitungen, indem man die Variable(n), nach welchen nicht abgeleitet wird als Konstanten betrachtet.

(ii) Wir haben die partiellen Ableitungen an einer Funktion von zwei Variablen betrachtet, jedoch gelten analoge Definitionen für partielle Ableitungen von Funktionen von drei und mehr Variablen.

(iii) Genau wie bei Funktionen einer Variablen ist die partielle Ableitung einer Funktion von mehreren Variablen wieder eine Funktion von mehreren Variablen.

(iv) Es existieren viele verschiedene Notationen für die partielle Ableitung, zum Beispiel gilt für $z = f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_{,x} = f_x = \partial_x f = \partial_x z = \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y.$$

Die ersten paar Notationen werden verwendet um die partielle Ableitung möglichst kompakt zu schreiben. Die letzte Notation wird verwendet um zu betonen welche Variable konstant gehalten wird.

Beispiel: Sei $f(x,y) = x^2 + 3xy + y - 1$. Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) \\ &= 2x + 3y. \end{aligned}$$

Wir haben die Argumente der besseren Übersicht wegen weggelassen. Mit Argumenten geschrieben ist dies

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y.$$

Ausgewertet am Punkt $(4, -5)$ ist dies

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4, -5) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = -7.$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2+3xy+y-1)\\ &= 3x+1\end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4,-5) = 13.$$

4.3.1. *Partielle Ableitungen höherer Ordnung.* Die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x,y)$ sind die Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Daraus folgen die *partiellen Ableitungen zweiter Ordnung*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x,y) = x\cos(y) + ye^x.$$

Wir haben

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y) + ye^x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin(y) + e^x.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -\sin(y)+e^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\sin(y)+e^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\cos(y).$$

Wir sehen dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$$

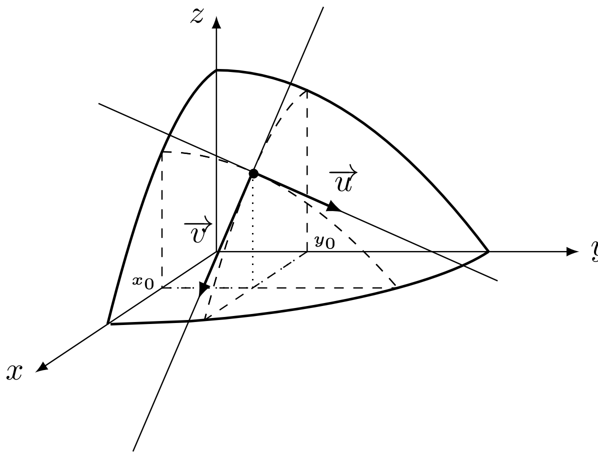
Allgemein gilt: Die Ableitungen dürfen vertauscht werden, sofern die Ableitungen stetige Funktionen sind (dies ist bei allen Funktionen in den vorliegenden Vorlesungsnotizen der Fall).

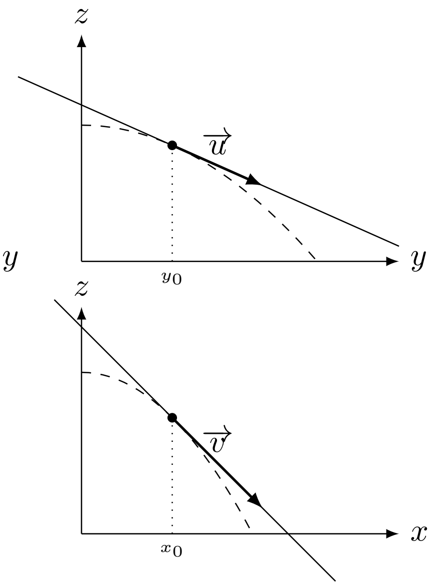
4.4. **Tangentialebene.** Wir betrachten eine Funktion $f(x,y)$ und einen Punkt (x_0,y_0) im Definitionsbereich dieser Funktion. Gesucht ist eine Gleichung der Tangentialebene an den Graphen $z = f(x,y)$ im Punkt $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Dazu betrachten wir die Tangenten an die Schnittkurven $x = x_0$ und $y = y_0$, jewils in der y-z- und der x-z-Ebene und die dazugehörigen Geraden im dreidimensionalen Raum. Die beiden Geraden im dreidimensionalen Raum spannen die Tangentialebene auf. Die Steigung der Tangente an die Schnittkurve $x = x_0$ ist gegeben durch $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$. Somit besitzt diese Gerade im dreidimensionalen Raum den Richtungsvektor

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \end{pmatrix},$$

wobei wir die Notation $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ benutzen. Die Steigung der Tangente an die Schnittkurve $y = y_0$ ist gegeben durch $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$. Somit besitzt diese Gerade im dreidimensionalen Raum den Richtungsvektor

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \end{pmatrix}.$$





Die Vektoren $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ spannen die Tangentialebene auf, der Vektor

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

steht somit normal auf der Tangentialebene. Die *Gleichung der Tangentialebene* an den Graphen von $f(x,y)$ im Punkt $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ ergibt sich somit zu[8]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Dies ist die kartesische Form einer Ebenengleichung

$$ax + by + cz = d,$$

mit

$$a = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \qquad b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \qquad c = -1, \qquad d = x_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + y_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 - z_0.$$

Umstellen dieser Gleichung nach $z - z_0$ ergibt

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0).$$

[8]Wir verwenden dass eine Ebene durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) mit Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ durch die Gleichung

$$\overrightarrow{n} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

gegeben ist.

Mit den folgenden Abkürzungen für die Differenzen:

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = y - y_0, \qquad \Delta z = z - z_0,$$

lautet die Ebenenengleichung

$$\Delta z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y.$$

Diese Gleichung drückt die Differenz in z-Richtung durch die Differenzen in x- und y-Richtung aus, mit Vorfaktoren gegeben durch die partiellen Ableitungen von $f(x,y)$[9].

Als Beispiel bestimmen wir eine Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 + e^{xy}$ im Punkt $(1,0,2)$. Die letzte Koordinate des Punktes müsste nicht gegeben sein, da der Punkt auf dem Graphen von $f(x,y)$ liegt. Es gilt somit $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,2)$. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + ye^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + xe^{xy}$$

und wir haben

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 2, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 1.$$

Die Gleichung der Tangentialebene ist somit

$$z - 2 = 2(x-1) + 1(y-0),$$

i.e.

$$z = 2x + y.$$

4.5. **Lineare Approximierung.** Im eindimensionalen Fall wurde eine Funktion $f(x)$ betrachtet und die lineare Approximation von $f(x)$ an der Stelle x_0 als

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)$$

angegeben, i.e. die lineare Approximation einer Funktion $f(x)$ ist das Ersetzen der Funktion $f(x)$ durch die Gleichung der Tangente an den Graphen $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, y_0 = f(x_0))$.

Analog dazu definieren wir die *lineare Approximation einer Funktion* $f(x,y)$ an der Stelle (x_0, y_0) als

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0).$$

Man spricht an Stelle von der linearen Approximation auch von der *Linearisierung der Funktion* $f(x,y)$.

[9]Die Gleichung für die Differenz in z besitzt die analoge Form zur Gleichung im eindimensionalen Fall:

$$y - y_0 = \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0),$$

welche die Tangente an den Graphen $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, y_0 = f(x_0))$ beschreibt. Hier wird die Differenz in y-Richtung durch die Differenz in x-Richtung ausgedrückt, mit dem Vorfaktor gegeben durch die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der betreffenden Stelle.

4.6. **Ableitung nach einem Parameter: Kettenregel.** Im folgenden betrachten wir eine Funktion $f(x,y)$ wobei die Argumente x, y in Abhängigkeit eines Parameters t gegeben sind. Eine solche Abhängigkeit der Parameter x, y wird durch eine Kurve $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$ in der x-y-Ebene realisiert. Somit betrachten wir die Funktion $f(x,y)$ entlang einer Kurve in der x-y-Ebene. Die Änderung der Funktion f entlang der Kurve ist gegeben durch die Kettenregel für Funktionen von mehreren Variablen.

4.6.1. *Verkettung einer Funktion von zwei Variablen mit einer Kurve.* Es seien

(i) eine Funktion

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto z = f(x,y) \end{aligned}$$

(ii) und eine Kurve in der x-y-Ebene

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} : I &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \overrightarrow{r}(r) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(I ist ein Intervall und $x(t)$, $y(t)$ sind gegebene Funktionen) gegeben. Wir nehmen an dass die Kurve im Definitionsbereich D der Funktion $f(x,y)$ liegt. Wir betrachten die *Hintereinanderschaltung* (oder *Verkettung*) von $\overrightarrow{r}(t)$ und $f(x,y)$. Diese ist gegeben durch die Funktion

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto F(t) = f(\overrightarrow{r}(t)) = f(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Die Funktion $F(t)$ ist die Funktion $f(x,y)$ entlang der Kurve $\overrightarrow{r}(t)$.

Bemerkung: Die Kurve

$$\overrightarrow{R}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f(x(t), y(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ F(t) \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Kurve im dreidimensionalen Raum, welche auf dem Graphen von $f(x,y)$ und oberhalb der Kurve $\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ liegt. Mit 'oberhalb' ist gemeint dass die Kurve $\overrightarrow{r}(t)$ die Projektion der Kurve $\overrightarrow{R}(t)$ auf die x-y-Ebene darstellt.

Beispiel: Seien

$$f(x,y) = -\frac{1}{2}y + 4, \qquad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 + \cos(t) \\ 2 + \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} F(t) &= f(\overrightarrow{r}(t)) = f(2 + \cos(t), 2 + \sin(t)) = -\frac{1}{2}(2 + \sin(t)) + 4 = -\frac{1}{2}\sin(t) + 3, \\ \overrightarrow{R}(t) &= \begin{pmatrix} 2 + \cos(t) \\ 2 + \sin(t) \\ -\frac{1}{2}\sin(t) + 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.6.2. *Kettenregel.* Sei $F(t) = f(\overrightarrow{r}(t)) = f(x(t), y(t))$. Für die Ableitung der Funktion $F(t)$ gilt die *Kettenregel*

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t).$$

In kompakter Form, ohne die Argumente, aufgeschrieben ist dies

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Wir überprüfen diese Regel an einem Beispiel: Seien

$$f(x,y) = x^2y + y^3, \qquad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Ableitung von $F(t) = f(\overrightarrow{r}(t))$ auf zwei verschiedene Arten:

(i) Durch Hintereinanderschaltung von $f(x,y)$ mit $\overrightarrow{r}(t)$ und nachfolgendem Ableiten:

$$\begin{aligned} F(t) = f(\overrightarrow{r}(t)) &= x(t)^2y(t) + y(t)^3 \\ &= t^4e^t + e^{3t}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{dF}{dt}(t) = e^t\left(4t^3 + t^4 + 3e^{2t}\right).$$

(ii) Durch die Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}(t) \\ &= 2x(t)y(t)2t + (x(t)^2 + 3y(t)^2)e^t \\ &= e^t\left(4t^3 + t^4 + 3e^{2t}\right). \end{aligned}$$

Bemerkung: Analog gilt in drei Dimensionen mit $f(x,y,z)$, $\overrightarrow{r}(t) = (x(t),y(t),z(t))$ und $F(t) = f(\overrightarrow{r}(t))$:

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}(t).$$

4.7. **Gradient.** Wir betrachten nun die Hintereinanderschaltung einer Funktion $f(x,y)$ mit einer Kurve $\overrightarrow{r}(t)$, wobei jedoch $\overrightarrow{r}(t)$ eine Gerade ist. Die Änderung der Funktion f entlang der Geraden führt auf den Begriff der Richtungsableitung. Durch den Gradienten von f ergibt sich eine geometrische Schreibweise der Richtungsableitung.

4.7.1. *Richtungsableitung.* Gegeben seien eine Funktion $f(x,y)$, ein Einheitsvektor $\overrightarrow{e} = (e_x, e_y)$ (i.e. es gilt $|\overrightarrow{e}| = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = 1$) und ein Punkt (x_0, y_0) in der x-y-Ebene. Sei $\overrightarrow{r}(t)$ die Gerade durch den Punkt (x_0,y_0) mit Richtung $\overrightarrow{e}$:

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\overrightarrow{e}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten nun die Hintereinanderschaltung von $f(x,y)$ und der Geraden $\overrightarrow{r}(t)$, i.e. wir betrachten $F(t) = f(\overrightarrow{r}(t))$. Die Ableitung von $F(t)$ an der Stelle $t = 0$ (wir haben $\frac{dx}{dt}(t) = e_x$, $\frac{dy}{dt}(t) = e_y$) ist

$$\frac{dF}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)e_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)e_y.$$

Diese Ableitung heisst *Richtungsableitung* der Funktion $f(x,y)$ in Richtung von $\overrightarrow{e}$ und wird mit $D_{\overrightarrow{e}}f(x_0,y_0)$ notiert. I.e.

$$D_{\overrightarrow{e}}f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)e_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)e_y,$$

oder kompakter, ohne Argumente,

$$D_{\vec{e}} f = \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y.$$

Beispiel: Die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ und der Vektor $\vec{v} = (1,1)$ seien gegeben. Gesucht ist die Richtungsableitung von $f(x,y)$ in die Richtung des Vektors $\vec{v}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2,1)$. Dazu wird ein Einheitsvektor in die Richtung von $\vec{v}$ benötigt. Dieser ist gegeben durch

$$\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Richtungsableitung von $f(x,y)$ in die Richtung des Vektors $\vec{v}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}} f(2,1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 4 \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

4.7.2. *Formel für den Gradient.* Sei eine Funktion $f(x,y)$ gegeben. Der *Gradient* von $f(x,y)$ ist definiert durch

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Eine analoge Definition gilt in höheren Dimensionen. Beispielsweise ist der Gradient der Funktion $f(x,y) = 2x + 3y^2$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6y \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gradienten kann die Richtungsableitung wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}} f &= \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \\ &= \vec{\nabla} f \cdot \vec{e}. \end{aligned}$$

Es ist von Vorteil diesen Ausdruck in der Reihenfolge $\vec{e} \cdot \vec{\nabla} f$ zu schreiben, um zu betonen dass die Ableitung nur auf die Funktion $f(x,y)$ trifft und nicht auch noch auf $\vec{e}$.

Bemerkungen:

(i) Für den Vektor $\vec{e}$ im Ausdruck der Richtungsableitung muss ein Vektor der Länge Eins verwendet werden, i.e. es muss $|\vec{e}| = 1$ gelten, da sonst $D_{\vec{e}} f$ nicht die Steigung beschreibt. Beispielsweise soll die Ableitung in Richtung der x-Achse durch eine Richtungsableitung berechnet werden. Einmal mit einem Vektor der Länge Eins und einmal mit einem Vektor mit Länge ungleich Eins:

$$D_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$D_{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} f = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\nabla} f = 2 \frac{\partial f}{\partial x}.$$

In der zweiten Zeile wurde ein Vektor $\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 2$ verwendet. Der resultierende Ausdruck entspricht der doppelten Steigung.

(ii) Die Zuordnung

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &: D \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto \vec{\nabla} f(x, y) \end{aligned}$$

ordnet jedem Punkt (x, y) in der x-y-Ebene den Vektor $\vec{\nabla} f(x, y)$ zu. Eine solche Zuordnung heisst *Vektorfeld.* Zur Darstellung eines Vektorfeldes wird an jedem Punkt eines Gitters in der x-y-Ebene ein Vektor gezeichnet. Viele physikalische Grössen wie zum Beispiel elektrische und magnetische Felder sind Vektorfelder.

(iii) Die Gleichung der linearen Approximation einer Funktion $f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) kann mit dem Gradienten in folgender Weise einfach aufgeschrieben werden:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

4.7.3. *Eigenschaften des Geradienten.* Der Gradient besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) Rechenregeln: Seien $f(x, y)$, $g(x, y)$ und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(f + g) &= \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g, \\ \vec{\nabla}(Cf) &= C\vec{\nabla} f, \\ \vec{\nabla}(fg) &= f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f. \end{aligned}$$

Die Regeln gelten in allen Dimensionen und folgen direkt aus den entsprechenden Regeln für die Ableitung von Funktionen einer Variablen.

(ii) Unter Verwendung der Formel für das Skalarprodukt haben wir

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}} f &= \vec{e} \cdot \vec{\nabla} f \\ &= |\vec{e}||\vec{\nabla} f| \cos(\varphi) \\ &= |\vec{\nabla} f| \cos(\varphi), \end{aligned}$$

wobei wir mit φ den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{e}$ und $\vec{\nabla} f$ bezeichnen. In dieser Form lässt sich nun die Richtungsableitung $D_{\vec{e}} f$ wie folgt interpretieren: $D_{\vec{e}} f$ ist maximal wenn $\vec{e}$ in die gleiche Richtung wie $\vec{\nabla} f$ zeigt (dann ist $\cos(\varphi) = 1$), i.e. die Änderung von f ist maximal in der Richtung des Gradienten. Der maximale Wert von $D_{\vec{e}} f$ ist $|\vec{\nabla} f|$.

(iii) Sei $\vec{r}(t)$ eine Höhenlinie von $f(x, y)$. Dann folgt

$$f(\vec{r}(t)) = \text{konst.}$$

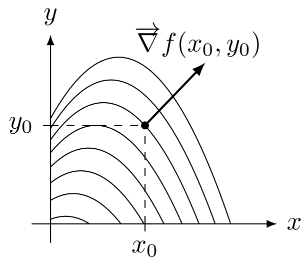
Ableiten nach t ergibt

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0,$$

i.e.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla} f = 0.$$

Da $\vec{r}(t)$ eine Höhenlinie beschreibt und $\frac{d\vec{r}}{dt}$ tangential zu $\vec{r}(t)$ und somit tangential zur Höhenline verläuft, gilt dass der Gradient senkrecht auf Höhenlinien steht. In der folgenden Grafik sind Höhenlinien einer Funktion $f(x, y)$ im ersten Quadranten und der Gradient von $f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) gezeichnet.



Ein analoges Resultat gilt in drei Dimensionen. Die Rolle der Höhenlinien spielen dort die Niveauflächen und der Gradient

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

verläuft senkrecht zu den Niveauflächen.[10] Dies ermöglicht eine einfache Bestimmung von Tangentialebenen an Flächen. Sei beispielsweise die Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9$ gegeben. Gesucht ist die Tangentialebene an die Niveaufläche $f(x, y, z) = 0$ im Punkt $(1, 2, 4)$. Der Gradient ist gegeben durch

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{\nabla} f(1,2,4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da der Gradient von f senkrecht zu den Niveauflächen verläuft kann man $\overrightarrow{\nabla} f$ als Normalenvektor der Tangentialebene verwenden, i.e. wir setzen $\overrightarrow{n} = (2, 4, 1)$ und zusammen mit $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 4)$ wird die Gleichung der Tangentialebene $\overrightarrow{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ zu

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 4 \end{pmatrix} = 0,$$

i.e.

$$2x + 4y + z = 14.$$

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ am Punkt $(1, 1)$ und suchen die Richtung in welcher $f(x, y)$

(i) am stärksten wächst,
(ii) am stärksten fällt,
(iii) weder fällt noch wächst.

[10] Dies kann man zeigen indem man zwei Kurven $\overrightarrow{r}_1(t)$, $\overrightarrow{r}_2(t)$ auf einer (und der selben) Niveaufläche betrachtet, welche sich in einem Punkt unter einem Winkel ungleich Null schneiden. Die Ableitung nach t von $f(\overrightarrow{r}_1(t)) =$ konst. und $f(\overrightarrow{r}_2(t)) =$ konst. (die Konstante ist die selbe, da die beiden Kurven auf der selben Niveaufläche liegen) ergibt

$$\frac{d\overrightarrow{r_1}}{dt} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = 0, \qquad \frac{d\overrightarrow{r_2}}{dt} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = 0,$$

i.e. der Gradient steht senkrecht auf beiden Kurventangenten, die Kurventangenten liegen in der Tangentialebene an die Niveaufläche und somit steht der Gradient senkrecht auf der Niveaufläche.

Wir haben

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$\vec{\nabla} f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

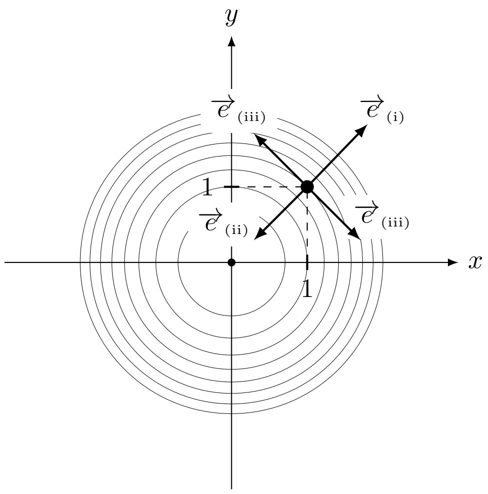
Die gesuchten Richtungen sind somit:

(i) $\vec{e}_{(\mathrm{i})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) $\vec{e}_{(\mathrm{ii})} = -\vec{e}_{(i)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Orthogonal zu $\vec{v}_{(\mathrm{i})}$: $\vec{e}_{(\mathrm{iii})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In der folgenden Grafik sind Höhenlinien von $f(x,y) = x^2 + y^2$ und der Punkt $(1,1)$ zusammen mit den Richtungen aus (i), (ii) und (iii) gezeichnet.



4.7.4. *Gravitation.* Der Zusammenhang zwischen Gravitationsfeld $\vec{g}$, Gravitationspotential ϕ und Gravitationskraft $\vec{F}_g$ ist gegeben durch

$$\vec{F}_g = m\vec{g},$$
$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi,$$

wobei m die Masse des betrachteten Körpers bezeichnet.

(i) Gravitation in Erdnähe: Das Gravitationspotential ϕ ist gegeben durch

$$\phi(x,y,z) = gz,$$

wobei wir mit g die Gravitationskonstante in Erdnähe bezeichnen ($g \approx 9.81\,\mathrm{m/s^2}$). Somit folgt für das Gravitationsfeld

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

und die Kraft auf den Körper der Masse m ist

$$\overrightarrow{F}_g = m\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix},$$

i.e. die Kraft zeigt vertikal nach unten und ihr Betrag ist gleich mg.

(ii) Allgemein: Das Gravitationspotential ist gegeben durch (in der Gleichung für die Funktion ϕ lassen wir zur besseren Übersicht die Argumente (diese sind x, y und z) weg)

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \qquad \text{wobei} \qquad r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

i.e. r ist der Abstand zum Ursprung. Hier sind G die Gravitationskonstante ($G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$) und M die Masse des Körpers, am Ursprung des Koordinatensystems, welcher die Quelle des Gravitationsfeldes darstellt (bei Planetenbewegungen um die Sonne ist M die Sonnenmasse). Zur Bestimmung des Gravitaionsfeldes benötigen wir den Gradienten von ϕ. Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= -GM\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\\ &= -GM\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\\ &= GMx(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\\ &= \frac{GM}{r^3}x, \qquad \text{analog:} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{GM}{r^3}y, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{GM}{r^3}z.\end{aligned}$$

Somit folgt für das Gravitationsfeld

$$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\nabla}\phi = -\frac{GM}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und die Kraft auf einen Körper der Masse m ist

$$\overrightarrow{F}_g = m\overrightarrow{g} = -\frac{GMm}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

i.e. die Kraft zeigt zum Ursprung. Der Betrag der Kraft, ausgeübt von einem Körper der Masse M, positioniert am Ursprung, auf einen Körper der Masse m, positioniert beim Punkt mit Koordinaten (x,y,z), ist somit

$$|\overrightarrow{F}_g| = \frac{GMm}{r^3}\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right| = \frac{GMm}{r^2}.$$

4.8. **Extremalwertprobleme in zwei Dimensionen.**

4.8.1. *Einführung.* Eine Funktion $f(x,y)$ besitzt an der Stelle (x_0,y_0) ein *relatives Maximum* bzw. ein *relatives Minimum*, falls in einer Umgebung von (x_0,y_0) (ohne (x_0,y_0)) gilt:

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0) &> f(x,y) \qquad \text{relatives Maximum,}\\ f(x_0,y_0) &< f(x,y) \qquad \text{relatives Minimum.}\end{aligned}$$

Oft wird an Stelle von relativ auch der Begriff *lokal* verwendet.

Beispiele:

(i) Wir betrachten die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ haben wir

$$f(x,y) = x^2 + y^2 > 0 = f(0,0).$$

Somit ist der Punkt $(0,0)$ ein Minimum.

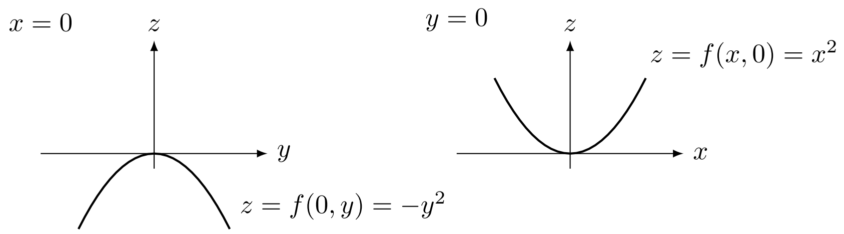
(ii) Wir betrachten die Funktion $g(x,y) = -x^2 - y^2 + 4$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ haben wir

$$g(x,y) = -x^2 - y^2 + 4 < 4 = g(0,0).$$

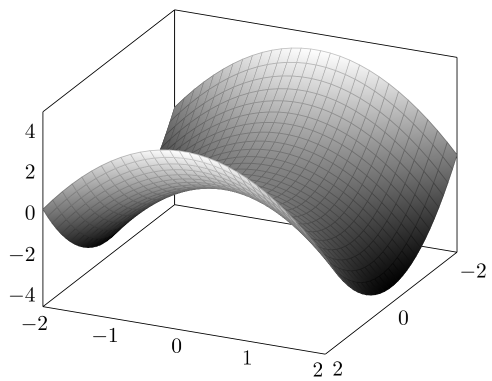
Somit ist der Punkt $(0,0)$ ein Maximum.

Wie bei Funktionen von einer Variablen führt der Zugang zum Auffinden von relativen Extrema über die erste Ableitung. Es gilt das folgende: Falls $f(x,y)$ am Punkt (x_0, y_0) ein relatives Maximum oder Minimum besitzt, so verschwinden an diesem Punkt die partiellen Ableitungen, i.e. es gilt $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$. Im folgenden bezeichnen wir einen Punkt (x_0, y_0) an welchem $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$ gilt als *kritischen Punkt* von $f(x,y)$.

Die Bedingung des Verschwindens des Gradienten ist eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines relativen Maximums oder Minimums, aber die Bedingung ist nicht hinreichend. Betrachten wir beispielsweise die Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ am Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$. Es gilt $\vec{\nabla} f(0,0) = \vec{0}$. Jedoch ist der Punkt $(0,0)$ weder ein relatives Maximum weder ein relatives Minimum, wie die Betrachtung der Schnittkurven $x = 0$ und $y = 0$ zeigt. Die Schnittkurve $x = 0$ ist $f(0,y) = -y^2$, i.e. eine nach unten geöffnete Parabel. Die Schnittkurve $y = 0$ ist $f(x,0) = x^2$, i.e. eine nach oben geöffnete Parabel:



Wenn man somit den Graphen von f in Richtung der y-Achse durchschreitet liegt am Punkt $(0,0)$ ein Maximum des Pfades vor, wenn man aber den Graphen von f in Richtung der x-Achse durchschreitet liegt am Punkt $(0,0)$ ein Minimum des Pfades vor. Ein solcher Punkt wird *Sattelpunkt* genannt, da der Graph in diesem Punkt die Form eines Sattels aufweist. Präzis entspricht ein Sattelpunkt einer Funktion $f(x,y)$ einem Punkt (x_0, y_0), für den eine Umgebung existiert in welcher die Funktion $f(x,y)$ Funktionswerte grösser und kleiner als der Funktionswert $f(x_0, y_0)$ annimmt. In der folgenden Grafik ist der Graph von $f(x,y) = x^2 - y^2$ gezeichnet:



Der gezeigte Bereich entspricht $-2 \leq x \leq 2$ und $-2 \leq y \leq 2$. Sind (wie in dieser Grafik) keine Achsen eingezeichnet, wird davon ausgegangen dass die x-Achse nach vorne links, die y-Achse nach vorne rechts und die z-Achse nach oben zeigt.

4.8.2. *Allgemeines Kriterium für das Auffinden von relativen Maxima, Minima und Sattelpunkten.* Sei eine Funktion $f(x,y)$ gegeben und sei (x_0,y_0) ein kritischer Punkt von $f(x,y)$, i.e. wir haben $\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \vec{0}$. Wir betrachten die folgende Matrix, deren Einträge die zweiten Ableitungen von $f(x,y)$ im Punkt (x_0,y_0) sind:

$$f''(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Diese Matrix heisst *Hesse Matrix.* Es gilt das folgende:

(i) Falls beide Eigenwerte von $f''(x_0,y_0)$ positiv sind, so befindet sich bei (x_0,y_0) ein relatives Minimum von $f(x,y)$.
(ii) Falls beide Eigenwerte von $f''(x_0,y_0)$ negativ sind, so befindet sich bei (x_0,y_0) ein relatives Maximum von $f(x,y)$.
(iii) Falls ein Eigenwert von $f''(x_0,y_0)$ positiv und ein Eigenwert von $f''(x_0,y_0)$ negativ ist, so befindet sich bei (x_0,y_0) ein Sattelpunkt von $f(x,y)$.
(iv) Es gibt (mindestens) einen Eigenwert gleich Null, dann ist die Situation (an Hand der Hesse Matrix) nicht definiert.

Wir betrachten nun vier Beispiele von Funktionen: $f_1, \dots, f_4$, welche den obigen vier Fällen enstprechen. Es wird jeweils der Punkt $(0,0)$ untersucht.

(i) Sei $f_1(x,y) = x^2 + y^2$. Wir haben $\vec{\nabla} f_1(0,0) = \vec{0}$ und
$$f_1''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Somit haben wir $\operatorname{spec}(f_1''(0,0)) = \{2\}$. Beide Eigenwerte sind positiv (es gibt einen Eigenwert, jedoch mit algebraischer Vielfachheit zwei) und $f_1(x,y)$ besitzt somit bei $(0,0)$ ein relatives Minimum.

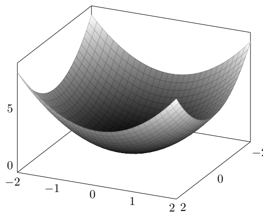
(ii) Sei $f_2(x,y) = -x^2 - y^2$. Wir haben $\vec{\nabla} f_2(0,0) = \vec{0}$ und
$$f_2''(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Somit haben wir $\operatorname{spec}(f_2''(0,0)) = \{-2\}$. Beide Eigenwerte sind negativ (es gibt einen Eigenwert, jedoch mit algebraischer Vielfachheit zwei) und $f_2(x,y)$ besitzt somit bei $(0,0)$ ein relatives Maximum.

(iii) Sei $f_3(x,y) = x^2 - y^2$. Wir haben $\vec{\nabla} f_3(0,0) = \vec{0}$ und
$$f_3''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Somit haben wir $\operatorname{spec}(f_3''(0,0)) = \{-2, 2\}$. Ein Eigenwert ist positiv und ein Eigenwert ist negativ und $f_3(x,y)$ besitzt somit bei $(0,0)$ einen Sattelpunkt.

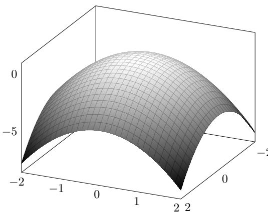
(iv) Sei $f_4(x,y) = y^2$. Wir haben $\vec{\nabla} f_4(0,0) = \vec{0}$ und
$$f_4''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Somit haben wir $\operatorname{spec}(f_4''(0,0)) = \{0, 2\}$. Ein Eigenwert ist positiv und ein Eigenwert ist gleich Null und die Situation ist somit für $f_4(x,y)$ im Punkt $(0,0)$ nicht definiert.

In den folgenden Grafiken sind die Graphen der Funktionen $f_1, \dots, f_4$ jeweils für den Bereich $-2 \le x \le 2$ und $-2 \le y \le 2$ gezeichnet.

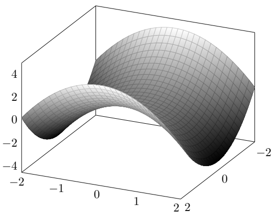
$f_1(x,y) = x^2 + y^2$



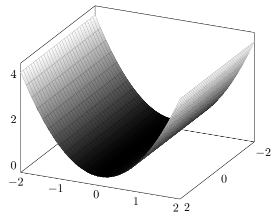
$f_2(x,y) = -x^2 - y^2$



$f_3(x,y) = x^2 - y^2$



$f_2(x,y) = y^2$



4.8.3. *Absolute Maxima und Minima in begrenzten Gebieten.* Es sei eine Funktion $f(x,y)$ und eine begrenzte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ gegeben. Wir interessieren uns für das Auffinden des Maximums und Minimums der Funktion im gegebenen Gebiet. Das Vorgehen ist das folgende:

(i) Man finde Punkte innerhalb des Randes (also nicht auf dem Rand) des Gebiets für welche $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ gilt, i.e. innere kritische Punkte von $f(x,y)$ und man werte die Funktion $f(x,y)$ an diesen Punkten aus. Wichtig: Die gefundenen Punkte werden nicht klassifiziert.

(ii) Man untersucht den Rand auf relative Maxima und Minima. An den gefundenen Stellen wird die Funktion $f(x,y)$ ausgewertet.

(iii) Der grösste, resp. kleinste Wert der Funktion $f(x,y)$ aus (i) und (ii) ist das absolute Maximum resp. Minimum.

Wir illustrieren das beschriebene Vorgehen an einem Beispiel: Sei $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$. Gesucht ist das absolute Maximum und Minimum von $f(x,y)$ im Gebiet des ersten Quadranten, begrenzt durch $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$.

(i) Wir haben

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2 - 2x \\ 2 - 2y \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ ergibt den inneren Punkt $(x,y) = (1,1)$. An diesem Punkt haben wir $f(1,1) = 4$.

(ii) Wir untersuchen die Randpunkte. Der Rand ist aus drei Geradenstücken aufgebaut.

(a) Wir betrachten die Funktion $f(x,y)$ entlang des Teils des Randes gegeben durch $y = 0$, i.e. wir betrachten die Funktion $f(x,y)$ eingeschränkt auf die x-Achse:

$$g(x) = f(x,0) = 2 + 2x - x^2, \qquad x \in [0,9].$$

Wir haben

$$\frac{dg}{dx}(x) = 2 - 2x.$$

Null setzen dieses Ausdrucks ergibt $x = 1$. Dies entspricht dem Punkt $(x,y) = (1,0)$. Der dazugehörige Funktionswert ist $f(1,0) = 3$. Die Funktionswerte an den Anfangs- und Endpunkten des betrachteten Teils des Randes sind $f(0,0) = 2$ und $f(9,0) = -61$.

(b) Wir betrachten die Funktion $f(x,y)$ entlang des Teils des Randes gegeben durch $x = 0$, i.e. wir betrachten die Funktion $f(x,y)$ eingeschränkt auf die y-Achse:

$$h(y) = f(0,y) = 2 + 2y - y^2, \qquad y \in [0,9].$$

Wir haben

$$\frac{dh}{dy}(y) = 2 - 2y.$$

Null setzen dieses Ausdrucks ergibt $y = 1$. Dies entspricht dem Punkt $(x, y) = (0, 1)$. Der dazugehörige Funktionswert ist $f(0, 1) = 3$. Die Funktionswerte an den Anfangs- und Endpunkten des betrachteten Teils des Randes sind $f(0, 0) = 2$ und $f(0, 9) = -61$.

(c) Wir betrachten die Funktion $f(x, y)$ entlang des Teils des Randes gegeben durch $y = 9 - x$. Dazu betrachten wir die Funktion $f(x, y)$ mit $y = 9 - x$:

$$\begin{aligned} k(x) = f(x, 9 - x) &= 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 \\ &= -61 + 18x - 2x^2, \qquad x \in [0, 9]. \end{aligned}$$

Wir haben

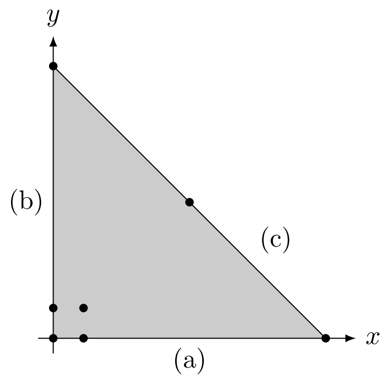
$$\frac{dk}{dx}(x) = 18 - 4x.$$

Null setzen dieses Ausdrucks ergibt $x = 9/2$. Dies entspricht dem Punkt $(x, y) = (9/2, 9/2)$. Der dazugehörige Funktionswert ist $f(9/2, 9/2) = -41/2$. Die Funktionswerte an den Anfangs- und Endpunkten des betrachteten Teils des Randes wurden bei den obigen Teilen des Randes bereits untersucht.

(iii) Wir listen die gefundenen Funktionserte auf:

Punkt	$(0,0)$	(0,1)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(9,0)$	$(0,9)$	$(9/2, 9/2)$
Funktionswert	2	3	3	4	-61	-61	-41/2

Somit befindet sich das absolute Maximum bei $(1, 1)$ und das absolute Minimum bei $(9, 0)$ und $(0, 9)$. In der folgenden Grafik ist das Gebiet mit den besprochenen Punkten eingezeichnet:



Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x, y) = -x^2 + y^2 + x$ im Gebiet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wir haben

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} -2x + 1 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Somit liegt der einzige kritische Punkt im Innern des Gebiets bei $(1/2, 0)$. Der dazugehörige Funktionswert beträgt $f(1/2, 0) = 1/4$. Für die Untersuchung von Punkten auf dem Rand des Gebiets parametrisieren wir diesen mit der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

und betrachten die verkettete Funktion

$$\begin{aligned} F(t) &= f(\overrightarrow{r}(t)) \\ &= f(\cos(t), \sin(t)) \\ &= -\cos^2(t) + \sin^2(t) + \cos(t). \end{aligned}$$

Ableiten und gleich Null setzen ergibt die Gleichung

$$(4\cos(t) - 1)\sin(t) = 0.$$

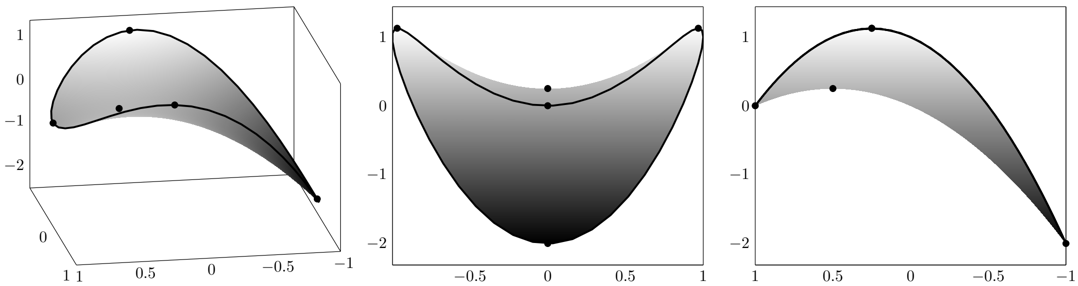
Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

(i) $\sin(t) = 0$. Daraus folgt $t = 0, \pi$. Diese Werte von t entsprechen den Punkten $(1, 0)$ und $(-1, 0)$. Die entsprechenden Funktionswerte sind $f(1, 0) = 0$, $f(-1, 0) = -2$.

(ii) $4\cos(t) - 1 = 0$. Daraus folgt $\cos(t) = 1/4$, i.e. $x = 1/4$. Die entsprechenden y-Werte sind gegeben durch die Gleichung des Randes in x-y-Koordinaten: $x^2 + y^2 = 1$. Daraus folgen die y-Werte zu $y = \pm\sqrt{15/16}$. Die dazugehörigen Funktionswerte sind $f(1/4, \sqrt{15/16}) = 9/8$ und $f(1/4, -\sqrt{15/16}) = 9/8$.

Punkt	$(1/2, 0)$	(1,0)	$(-1, 0)$	$(1/4, \sqrt{15/16})$	$(1/4, -\sqrt{15/16})$
Funktionswert	1/4	0	-2	9/8	9/8

Somit befinden sich bei $(1/4, \pm\sqrt{15/16})$ die absoluten Maxima und bei $(-1, 0)$ das absolute Minimum. Die folgende Grafik zeigt den Graphen von $f(x, y)$ gezeichnet über dem gegebenen Gebiet, in dreidimensionaler Darstellung, in Richtung negativer x-Achse und in Richtung negativer y-Achse.



4.8.4. *Methode der Lagrangemultiplikatoren.* Wir beginnen indem wir ein einfaches Problem mit drei verschiedenen Methoden lösen: Wir suchen das Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y) = x + y$ auf dem Kreis gegeben durch $x^2 + y^2 = 1$.

(i) Wir formulieren das Problem als Extremalwertproblem einer Funktion einer Variablen x, indem wir die zweite Variable y mit Hilfe der Nebenbedingung eliminieren. Die Nebenbedingung ist $x^2+y^2 = 1$. Daraus folgt $y_\pm(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. In die Funktion $f(x, y)$ eingesetzt erhalten wir $F_\pm(x) = f(x, y_\pm(x)) = x \pm \sqrt{1 - x^2}$. Die Ableitung davon ist

$$\frac{dF_\pm}{dx}(x) = 1 \mp \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dies gleich Null gesetzt ergibt

$$\sqrt{1 - x^2} = \pm x.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und die dazugehörigen y-Werte sind $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Somit ist das Maximum $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ und das Minimum $f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.

(ii) Wir parametrisieren den Kreis durch die Kurve $\overrightarrow{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi)$ und betrachten die Funktion $f(x, y)$ entlang des Kreises, i.e. wir betrachten die Verkettung von $f(x, y)$ mit der Kurve $\overrightarrow{r}(t)$:

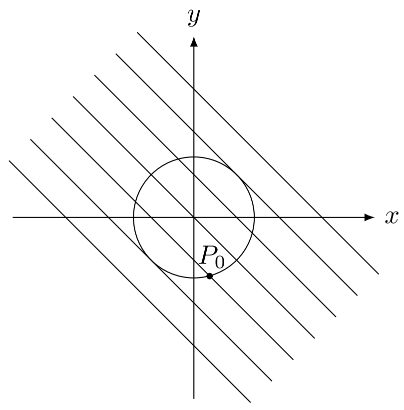
$$F(t) = f(\overrightarrow{r}(t)) = \cos(t) + \sin(t).$$

Die Ableitung ist

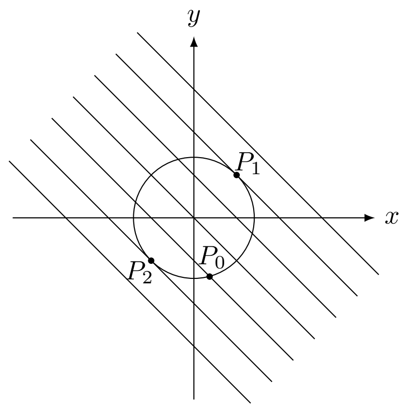
$$\frac{dF}{dt}(t) = -\sin(t) + \cos(t).$$

Null setzen ergibt $\sin(t) = \cos(t)$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $t = \pi/4, 5\pi/4$. Die dazugehörigen x- und y-Werte sind $(x, y) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ in Übereinstimmung mit (i).

(iii) Wir betrachten die Höhenlinien von $f(x, y) = x + y$ zusammen mit dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$:



Wir betrachten den Punkt P_0 auf dem Kreis. Der Punkt P_0 kann kein Extremalpunkt von $f(x, y)$ sein, da eine Verschiebung entlang des Kreises einen grösseren resp. kleineren Wert für $f(x, y)$ ergibt. Dies ist der Fall, da sich im Punkt P_0 die Höhenlinien und der Kreis transversal schneiden, i.e. bei einer Verschiebung erreicht man höhergelegene und tiefergelegene Höhenlinien. Die Punkte für Extremalwerte von $f(x, y)$ sind somit diejenigen Punkte auf dem Kreis, in welchen sich der Kreis und die Höhenlinien von $f(x, y)$ nicht transversal schneiden, i.e. diejenigen Punkte in welchen der Kreis und die Höhenlinien parallel verlaufen. Dies sind die Punkte P_1 und P_2:



Das Auffinden der Punkte P_1, P_2 geschieht folgendermassen: Wir fassen $x^2 + y^2 = 1$ als eine Höhenlinie der Funktion $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ auf. Der Kreis $x^2 + y^2 = 1$ ist dann gegeben durch $g(x, y) = 0$. In den gesuchten Punkten müssen nun die Höhenlinien der beiden Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ parallel verlaufen. Äquivalent dazu ist die Eigenschaft dass in den gesuchten Punkten der Gradient der Funktion $g(x,y)$ parallel zum Gradient der Funktion $f(x,y)$ steht, i.e. dass gilt

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

für eine Konstante λ. Wir haben

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\nabla} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

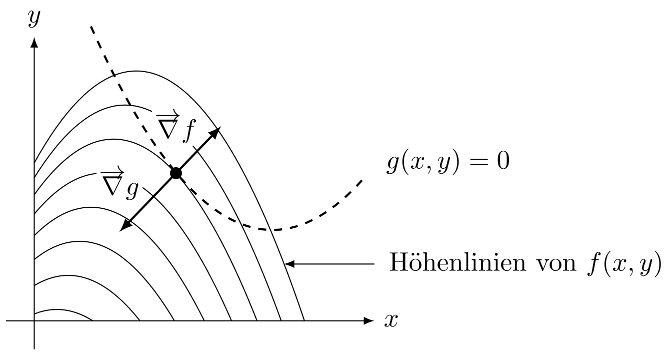
und die Gleichung $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ entspricht dem Gleichungssystem $1 = 2\lambda x$, $1 = 2\lambda y$. Zusätzlich muss gelten $g(x,y) = 0$, i.e. wir haben das System der drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x, \\ 1 &= 2\lambda y, \\ 1 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

in den drei Unbekannten x, y, λ. Die Lösungen lauten: $x = y = \pm 1/\sqrt{2}$, $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$ und die gesuchten Punkte P_1, P_2 besitzen die Koordinaten $(x,y) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ in Übereinstimmung mit den Resultaten aus (i) und (ii).

Allgemeine Formulierung der *Methode der Lagragemultiplikatoren*: Die lokalen Maxima und Minima von $f(x,y)$ unter der Bedingung $g(x,y) = 0$ findet man durch Lösen des Systems

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \lambda \vec{\nabla} g, \\ g &= 0. \end{aligned}$$



Bemerkungen:

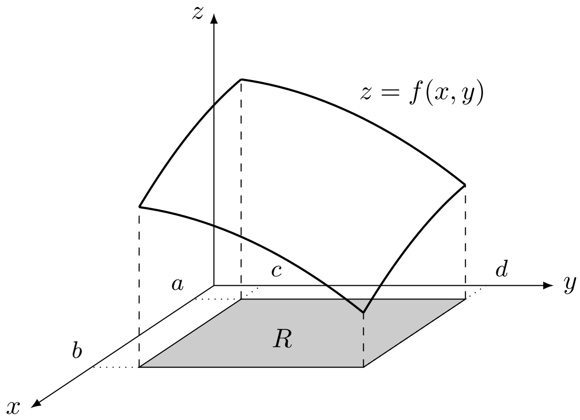
(i) Maxima und Minima müssen existieren.
(ii) $\vec{\nabla} g \neq \vec{0}$ muss gelten.
(iii) Forumulierung gilt in beliebigen Dimensionen.
(iv) λ heisst *Lagrangmultiplikator*.

5.1. **Integration über Rechteckgebiete.**

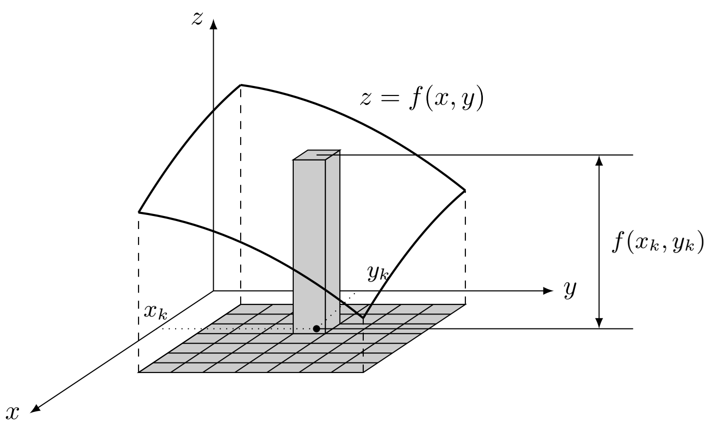
5.1.1. *Definition des Doppelintegrals.* Wir betrachten eine Funktion $f(x,y)$ welche in einem Rechteck

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$$

definiert ist. Wir nehmen einfachheitshalber an es gelte $f(x,y) > 0$ für $(x,y) \in R$.



Wir unterteilen das Rechteck R in n Teile an Hand eines Gitters. In jedem Abschnitt des Gitters wählen wir einen Punkt (x_k, y_k) und betrachten $f(x_k, y_k)\Delta A_k$, wobei wir mit ΔA_k die Fläche des k-ten Gitterabschnitts bezeichnen. Der Ausdruck $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ besitzt die Interpretation des Volumens des Prismas mit Grundfläche ΔA_k und Höhe $f(x_k, y_k)$.

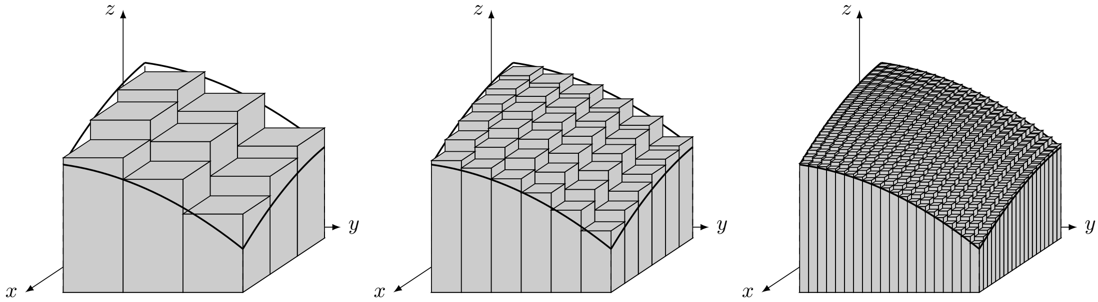


Analog zum Integral in einer Dimension definieren wir die Riemannsche Summe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k.$$

Die Riemannsche Summe besitzt die Interpretation eines Volumens, welches aufgespannt wird zwischen dem Rechteck R in der x-y-Ebene und einer treppenförmigen Approximation der Funktion $f(x,y)$. Diese Approximation wird besser, wenn das Gitter in R

feiner gewählt wird:



Das *Doppelintegral* der Funktion $f(x,y)$ über dem Gebiet R ist definiert als

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta A_k \to 0}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta A_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Bemerkungen:

(i) Analog zur Integration in einer Dimension ist der Ausdruck $f(x_k, y_k)\Delta A_k$, die Riemannsche Summe S_n und der Grenzwert davon auch für negative Funktionswerte definiert. Die Interpretation des Doppelintegrals als ein Volumen gilt nur bis auf Vorzeichen.

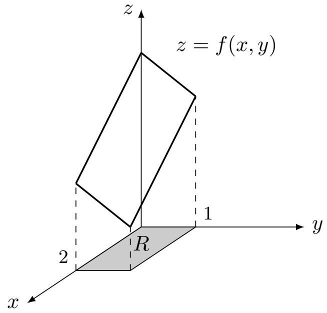
(ii) Die Lage des Punktes (x_k, y_k) im k-ten Gitterabschnitt braucht nicht spezifiziert zu werden, die Definition ist unabhängig davon.

(iii) Die Verteilung der Gitterabstände in R braucht nicht spezifiziert zu werden, die Definition ist unabhängig davon. Es ist aber wichtig dass beim Grenzübergang sowohl $n \to \infty$ als auch $\Delta A_k \to 0$ gilt, da ansonsten an gewissen Stellen im Gitter die Maschengrössen nicht gegen Null gehen und somit dort keine Verbesserung der Approximation des Volumens zwischen dem Graphen von $f(x,y)$ und der x-y-Ebene stattfindet.

5.1.2. *Berechnung.* Wir illustrieren die Vorgehensweise am Beispiel

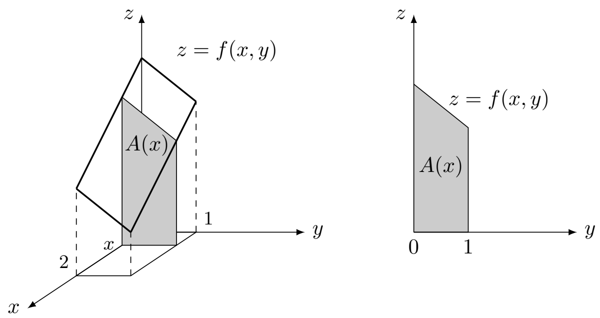
$$\iint_R f(x,y)dA, \quad \text{wobei} \quad f(x,y) = 4 - x - y,$$
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2; 0 \le y \le 1\}.$$

Die Interpretation des Doppelintegrals ist das Volumen zwischen dem Graphen $z = 4 - x - y$ und der x-y-Achse über R.



Wir berechnen die Querschnittsfläche $A(x)$ die durch x = konst. entsteht. Diese ist gegeben durch

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy.$$



Das Volumen kann nun durch aufsummieren von Scheibenvolumen, gebildet aus Querschnittsflächen infinitesimaler Dicke, berechnet werden. Diese Scheibenvolumen sind $A(x)dx$ und die Aufsummierung erfolgt durch Integration:

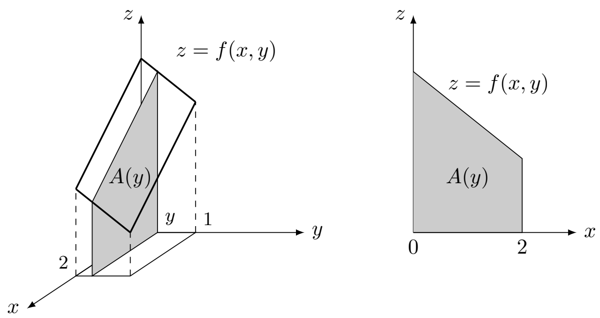
$$\begin{aligned}
\mathrm{V} &= \int_{x=0}^{x=2} A(x) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left(4y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{7}{2} - x \right) dx \\
&= \left(\frac{7}{2} x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=2} = 5.
\end{aligned}$$

Somit wird die Berechnung eines Doppelintegrals auf die Berechnung von zwei hintereinander ausgeführten einfachen Integralen zurückgeführt. I.e.

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} f(x, y) dy dx.$$

Es ist möglich die Integrationsreihenfolge umzukehren, i.e. zuerst den Querschnitte für y = konst. Ebenen zu berechnen. Dieser ist

$$A(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y) dx.$$



Das Volumen ist

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=0}^{y=1} A(y)dy \\ &= \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)dx \right) dy = \ldots = 5. \end{aligned}$$

I.e. es gilt

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dydx = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dxdy.$$

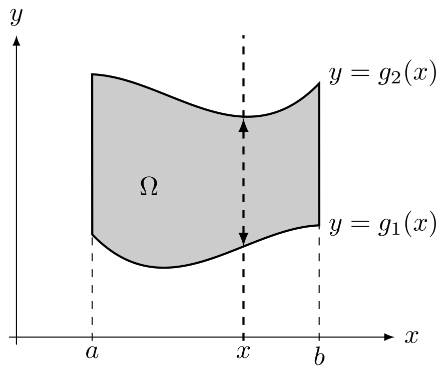
5.2. **Integration über nicht-rechteckige Gebiete.** Wir betrachten Doppelintegrale

$$\iint_\Omega f(x,y)dA,$$

wobei

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b; g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

Hier sind a, b gegebene Zahlen und $g_1(x)$, $g_2(x)$ gegebene Funktionen. Wie bei der Integration über Gebiete mit rechteckigem Querschnitt berechnen wir die Querschnittsfläche $A(x)$ für $x =$ konst.. Die Integrationsgrenzen für die Berechnung dieser Querschnittsfläche hängen von x ab, siehe gestrichelte dicke Linie in der folgenden Grafik:



Wenn man für $x =$ konst. in y-Richtung durch Ω hindurchsticht, trifft man auf Ω bei $y = g_1(x)$ und man verlässt Ω bei $y = g_2(x)$. Wir haben somit

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Das Doppelintegral ist gegeben durch aufsummieren der Scheibenvolumen infinitesimaler Dicke. Diese Scheibenvolumen sind $A(x)dx$ und die Aufsummierung erfolgt durch

Integration:

$$\iint_\Omega f(x,y)dA = \int_{x=a}^{x=b} A(x)dx$$
$$= \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)dydx.$$

Bemerkungen:

(i) Die Berandung bei $x = a$ oder $x = b$ muss nicht einer vertikalen Geraden entsprechen. Schnittpunkte von $g_1(x)$ und $g_2(x)$ sind möglich, i.e. $g_1(a) = g_2(a)$ und/oder $g_1(b) = g_2(b)$. Siehe Aufgaben.

(ii) Für Doppelintegale über Gebiete

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d; h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

wird in umgekehrter Reihenfolge integriert:

$$\iint_\Omega f(x,y)dA = \int_{y=c}^{y=d}\int_{x=h_1(x)}^{x=h_2(x)} f(x,y)dxdy.$$

(iii) Wird die Integrationsreihenfolge umgekehrt, ist das Invertieren der Funktionen, welche die Grenzen beschreiben notwendig. Siehe die nächste Übung.

5.3. **Eigenschaften von Doppelintegralen.** Wir haben die folgenden Eigenschaften:

(i) Sei C eine Konstante.

$$\iint_\Omega Cf(x,y)dA = C\iint_\Omega f(x,y)dA.$$

(ii)

$$\iint_\Omega (f(x,y)+g(x,y))dA = \iint_\Omega f(x,y)dA + \iint_\Omega g(x,y)dA.$$

(iii) Sei $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{\}$.

$$\iint_\Omega f(x,y)dA = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dA + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dA.$$

(iv) Sei $\Omega = R = [a,b] \times [c,d]$ und $f(x,y) = g(x)h(y)$.

$$\iint_R f(x,y)dA = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right).$$

5.4. **Anwendungen.**

5.4.1. *Volumen.* Wie bereits erwähnt besitzt das Doppelintegral für positive Funktionswerte $f(x,y) > 0$ die Interpretation eines Volumens. Somit kann das Doppelintegral für Volumenberechnungen eines Körpers verwendet werden, indem die Grundfläche des Körpers in die x-y-Ebene gelegt wird, die Deckfläche des Körpers als Graph einer positiven Funktion $f(x,y)$ geschrieben wird und diese Funktion über die Grundfläche des Körpers in der x-y-Ebene integriert wird. Man erhält das Volumen zwischen dem Graphen und der x-y-Ebene.

5.4.2. *Flächeninhalt.* Ist $f(x,y)=1$, so haben wir

$$|\Omega| = \iint_\Omega dA,$$

wobei wir mit $|\Omega|$ den *Flächeninhalt* von Ω bezeichnen. Zur Veranschaulichung kann man sich ein Blech der Dicke Eins vorstellen. Das Volumen und die Fläche des Blechs besitzen dann den selben Zahlenwert.

Falls Ω gegeben ist durch

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a \le x \le b; g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

dann haben wir

$$\begin{aligned} |\Omega| = \iint_\Omega dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx \\ &= \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))dx, \end{aligned}$$

i.e. wir finden die bekannte Formel für die Flächenberechnung mit Hilfe der Integration in einer Dimension.

5.4.3. *Durchschnitt.* Der *Durchschnitt* einer Funktion $f(x,y)$ in einem Gebiet Ω ist

$$\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega f(x,y)dA.$$

Als Beispiel berechnen wir den Durchschnitt von $f(x,y) = x\cos(xy)$ in $R = [0,\pi]\times[0,1]$. Wir haben

$$\begin{aligned} |\Omega| = \pi, \qquad \iint_R f(x,y)dA &= \int_0^\pi \int_0^1 x\cos(xy)dydx = \int_0^\pi \sin(xy)\Big|_0^1 dx \\ &= \int_0^\pi \sin(x)dx = 2. \end{aligned}$$

Somit beträgt der Durchschnitt $2/\pi$.

5.4.4. *Schwerpunkt einer Fläche.* Der *Schwerpunkt einer Fläche* besitzt die Koordinaten (x_S, y_S), wobei

$$x_S = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega xdA, \qquad y_S = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega ydA.$$

Als Beispiel berechnen wir die Schwerpunktskoordinaten von

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2; 0 \le y \le 2x^2\}.$$

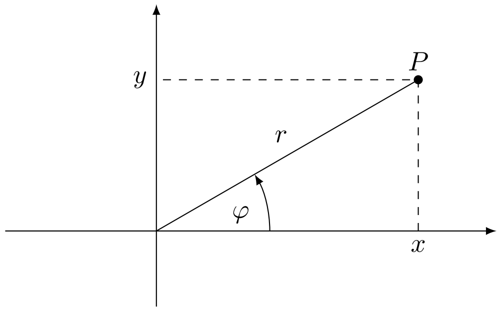
Wir haben

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \iint_\Omega dA = \int_0^2 \int_0^{2x^2} dydx = \int_0^2 2x^2 dx = \frac{16}{3}, \\ x_S &= \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega xdA = \frac{3}{16}\int_0^2 \int_0^{2x^2} xdydx = \frac{3}{16}\int_0^2 2x^3dx = \frac{3}{2}, \\ y_S &= \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega ydA = \frac{3}{16}\int_0^2 \int_0^{x^2} ydydx = \frac{3}{16}\int_0^2 2x^4dx = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Somit haben wir $(x_S, y_S) = (3/2, 12/5)$.

5.5. **Doppelintegrale in Polarkoordinaten.**

5.5.1. *Polarkoorinaten.* Die Polarkoordinaten eines Punktes P in der x-y-Ebene sind der *Radius* r und der *Polarwinkel* φ. Der Radius ist der Abstand des Punktes P zum Ursprung. Für den Polarwinkel betrachten wir eine Linie vom Ursprung zum Punkt P. Der Polarwinkel ist der Winkel welcher diese Linie mit der Abszisse (x-Achse) bildet. Der Winkel wird entgegen dem Uhrzeigersinn und von der Abszisse aus positiv gemessen.



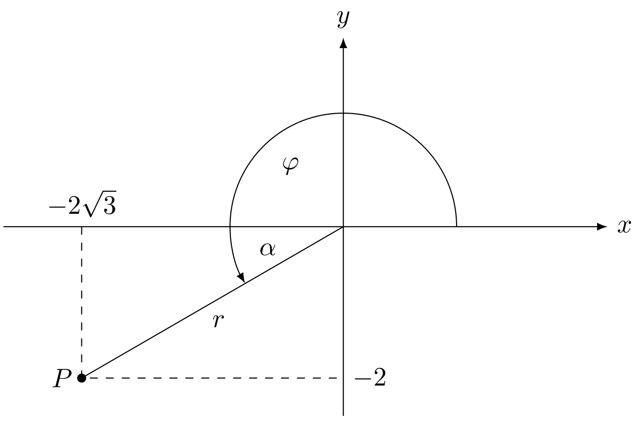
Die kartesischen Koordinaten x und y werden durch die Polarkoordinaten r, φ folgendermassen ausgedrückt

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi), \\ y &= r\sin(\varphi). \end{aligned}$$

Somit erfüllen die Polarkoordinaten die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan(\varphi) &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Die Lösung φ der zweiten Gleichung hängt von dem Quadranten ab. Beispielsweise ergeben sich aus $(x,y) = (-2\sqrt{3},-2)$ die Polarkoordinaten $r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = 4$. $\varphi = \pi+\alpha$, wobei $\alpha = \arctan(1/\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{6}$, i.e. $(r,\varphi) = (4, 7\pi/6)$. Den einfachsten Zugang zum Ausdruck für φ erhält man durch das anfertigen einer Skizze der Situation:



Bemerkungen:

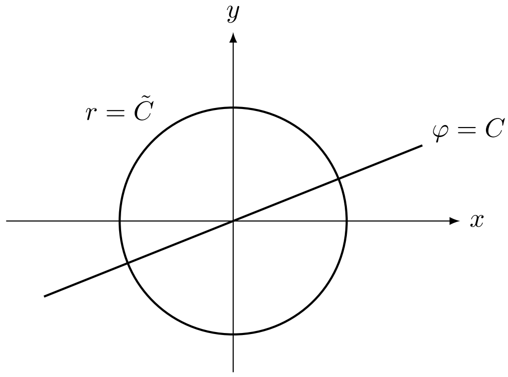
(i) φ ist nur bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmt, i.e. (r,φ) und $(r,\varphi+k2\pi)$ mit $k\in\mathbb{Z}$ beschreiben den selben Punkt in der x-y-Ebene.

(ii) Wir erlauben $r<0$. Es folgt dann dass die Koordinaten (r,φ) und $(-r,\varphi+\pi)$ den selben Punkt in der x-y-Ebene beschreiben.

5.5.2. *Polargleichungen/Funktionen/Graphen.* Wir illustrieren an Beispielen. Im folgenden werden Teilmengen der x-y-Ebene durch Gleichungen (resp. Ungleichungen) in den Variablen r und φ beschrieben.

(i) $r = C$ beschreibt einen Kreis mit Radius C und Zentrum am Ursprung.

(ii) $\varphi = C$ beschreibt eine Gerade durch den Ursprung welche mit der positiven x-Achse einen Winkel von C einschliesst.

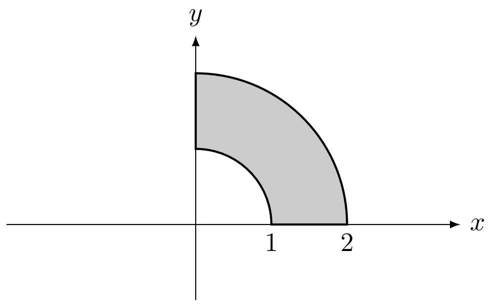


(iii) $r = 1$ und $r = -1$ beschreiben beide einen Kreis mit Radius 1 und Zentrum beim Ursprung.

(iv) Die Ungleichungen

$$1 \leq r \leq 2, \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

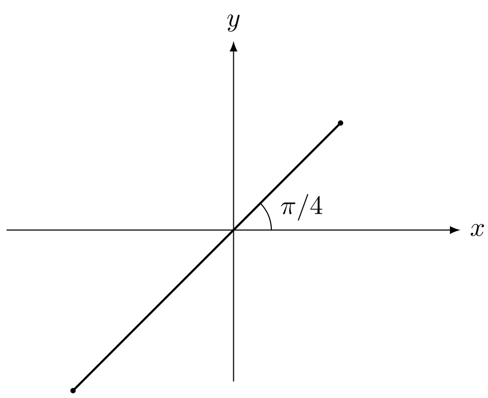
beschreiben die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:



(v) Die Ungleichungen

$$-3 \leq r \leq 2, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

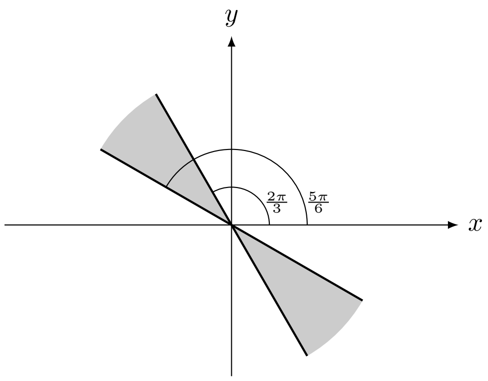
beschreiben das Teilstück einer Geraden zwischen den Punkten mit kartesischen Koordinaten $(-3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$ und $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (die Punkte gehören auch dazu):



(vi) Die Ungleichung

$$\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$$

beschreibt die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ (diese Teilmenge ist nicht beschränkt):



Im folgenden betrachten wir Beispiele von Funktionen $r(\varphi)$. Wir transformieren diese Funktionen auf bekannte Ausdrücke in den Variablen x und y.

(i)

$$r(\varphi) = \frac{4}{\cos(\varphi)}, \qquad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Multiplikation der Funktionsleichung mit $\cos(\varphi)$ führt auf $r\cos(\varphi) = 4$, i.e. $x = 4$. Dies ist die Gerade parall zur y-Achse, welche durch den Punkt $(x, y) = (4, 0)$ verläuft.

(ii)

$$r(\varphi) = -\frac{3}{\sin(\varphi)}, \qquad \varphi \in (0, \pi).$$

Analog wie in (i) führt diese Gleichung auf $y = -3$. Dies ist die Gerade parallel zur x-Achse durch den Punkt $(x, y) = (0, -3)$.

(iii)

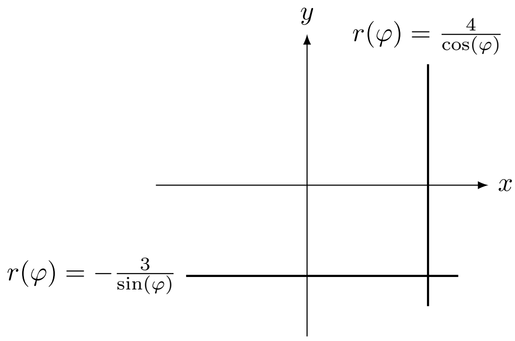
$$r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}}, \qquad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

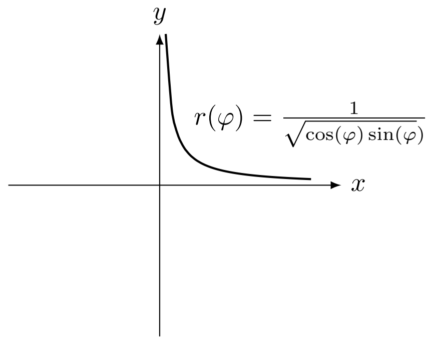
Durch Quadrieren folgt

$$r(\varphi)^2 = \frac{1}{\cos(\varphi)\sin(\varphi)},$$

i.e. $xy = 1$. Somit entspricht der Graph der Funktion $r(\varphi)$ der Kurve $y = 1/x$ für $x > 0$ (dieser Teil liegt im ersten Quadranten welcher den φ-Werten $\varphi \in (0, \pi/2)$

entspricht).





(iv)

$$r(\varphi) = 6\sin(\varphi), \qquad \varphi \in [0, \pi].$$

Multiplikation der Funktionsgleichung mit r führt auf $x^2 + y^2 = 6y$ und quadratisches Ergänzen ergibt

$$x^2 + (y-3)^2 = 9.$$

Dies entspricht einem Kreis mit Radius 3 und Zentrum $(0, 3)$.

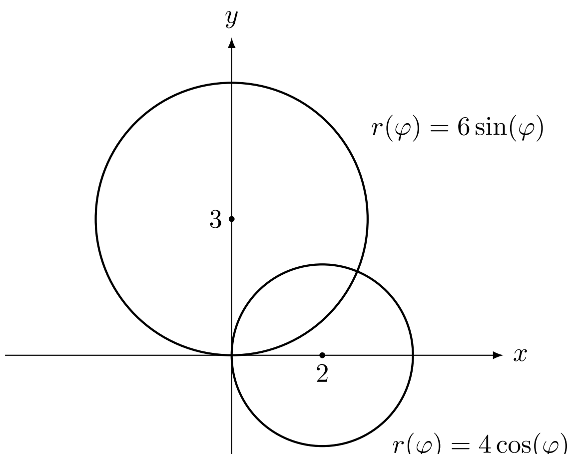
(v)

$$r(\varphi) = 4\cos(\varphi), \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Analoges Vorgehen wie bei (iv) ergibt

$$(x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Dies entspricht einem Kreis mit Radius 2 und Zentrum $(2, 0)$.



5.5.3. *Doppelintegrale.* Sei eine Funktion $f(r, \varphi)$ und eine Teilmenge Ω der x-y-Ebene in Polarkoordinaten durch die folgenden Ungleichungen gegeben

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta, \qquad g_1(\varphi) \leq r \leq g_2(\varphi).$$

Das Doppelintegral der Funktion $f(r, \varphi)$ über Ω, in Polarkoordinaten, ist gegeben durch

$$\iint_\Omega f(r, \varphi) dA = \int_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\beta} \int_{r=g_1(\varphi)}^{r=g_1(\varphi)} f(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

Wir verweisen speziell auf den zusätzlichen Faktor r im Integranden!

Analog zu den Gleichungen in kartesischen Koordinaten gelten die folgenden Gleichunge für Fläche und Schwerpunkt:

$$\begin{aligned}
|\Omega| &= \iint_\Omega dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} r dr d\varphi, \\
x_s &= \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega x dA = \frac{1}{|\Omega|} \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} r^2 \cos(\varphi) dr d\varphi, \\
y_s &= \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega y dA = \frac{1}{|\Omega|} \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi.
\end{aligned}$$

Als Beispiel berechnen wir die Schwerpunktskoordinaten des Viertelkreises im ersten Quadranten mit Radius R und Zentrum am Ursprung. Die Fläche ist $R^2\pi/4$. Somit ist die Schwerpunktskoordinate x_s

$$\begin{aligned}
x_s = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega x dA &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \int_{r=0}^{r=R} r^2 \cos(\varphi) dr d\varphi \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \int_0^{\pi/2} \frac{R^3}{3} \cos(\varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}.
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt $y_s = x_s$.

5.6. **Flächenmomente.**

5.6.1. *Axiale Flächenmomente.* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gegeben. Die *axialen Flächenmomente* sind gegeben durch die folgenden Integrale:

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_\Omega y^2 dA, \\
I_y &= \iint_\Omega x^2 dA.
\end{aligned}$$

5.6.2. *Deviationsmoment.* Das *Deviationsmoment* ist gegeben durch

$$I_{xy} = -\iint_\Omega xy dA.$$

5.6.3. *Polares Flächenmoment.* Das *polare Flächenmoment* ist gegeben durch

$$I_P = \iint_\Omega (x^2 + y^2) dA.$$

Bemerkungen:

(i) Alle Flächenmomente sind bezogen auf die x-y-Koordinatenachsen. Bei einer Verschiebung ergeben sich Korrekturen (siehe unten: Satz von Steiner), für rotierte Achsen siehe Vorlesung Lineare Algebra 2.

(ii) Grob gesprochen entsprechen die axialen Flächenmomente I_k eines Querschnitts dem geoemtrischen Widerstand des Querschnitts gegen Biegung bei Einwirkung eines Momentes entlang der k-Achse auf den Querschnitt. Die Interpretation des Integranden ist die Gewichtung von Flächen mit dem Abstand zur Biegeachse zum Quadrat, i.e. für grossen Widerstand gegen Biegung muss ein Querschnitt viel Fläche weg von der Biegeachse aufweisen. Siehe zum Beispiel Querschnitt eines I-Trägers.

(iii) Die axialen Flächenmomente entsprechen den Biegewiederstandsmomenten I in der Gleichung der Biegelinie:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{1}{EI}M(x),$$

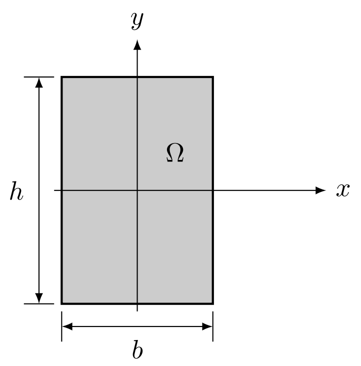
wobei wir mit $y(x)$ die Biegelinie, mit E das Elastizitätsmodul und mit $M(x)$ das Drehmoment auf den Querschnitt bezeichnen. I_x wird für Momente entlang der x-Achse verwendet, I_y für Momente entlang der y-Achse.

(iv) In der Mechanik und Festigkeitslehre werden y-z-Koordinaten im Querschnitt verwendet, die x-Achse ist entlang der Balkenlängsachse.

(v) Das Minuszeichen in der Definition des Deviationsmomentes ist Konvention, andere Konventionen sind auch im Gebrauch.

(vi) Bei kreisförmigem Querschnitt entspricht das polare Flächenmoment dem geometrischen Widerstand des Querschnitts gegen Torsion (Verdrehung).

Als Beispiel bestimmen wir die Flächenmomente I_x und I_y eines rechteckigen Querschnitts mit Breite b und Höhe h, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Wir nehmen weiter an die x- und y-Koordinatenachsen verlaufen durch den Schwerpunkt:



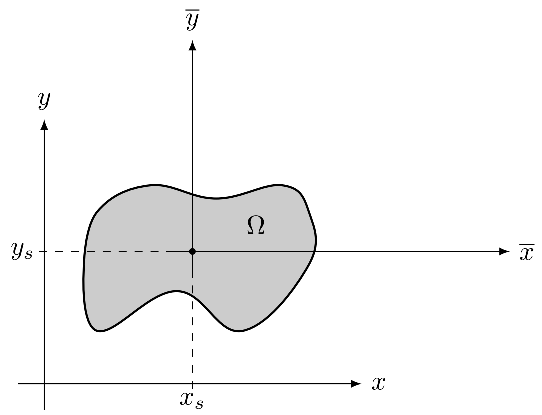
Wir haben

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_\Omega y^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy dx = \ldots = \frac{bh^3}{12}, \\ I_y &= \iint_\Omega x^2 dA = \ldots = \frac{hb^3}{12}, \\ I_{xy} &= -\iint_\Omega xy dA = \ldots = 0. \end{aligned}$$

5.6.4. *Satz von Steiner.* Die obigen Flächenmomente beziehen sich auf die x- und y-Koordinatenachsen. Der *Satz von Steiner* erlaubt die Berechnung der Flächenmomente bezüglich parallel verschobenen Koordinantenachsen aus den Flächenmomenten bezogen auf die x- und y-Koordinatenachsen. Beispielsweise soll der Ursprung des x-y-Koordinatensystems nicht mit dem Schwerpunkt des betrachteten Querschnitts zusammenfallen. Wir betrachten nun Koordinaten $\overline{x}$ und $\overline{y}$ welche aus den Koordinaten x und y wie folgt hervorgehen:

$$\overline{x} = x - x_s, \qquad \overline{y} = y - y_s.$$

Die Koordinatenachsen des $\overline{x}$-$\overline{y}$-Koordinatensystems verlaufen durch den Schwerpunkt, i.e. $\overline{x} = 0$ und $\overline{y} = 0$ bedeutet $x = x_s$ und $y = y_s$.



Ein Flächenträgheitsmoment bezüglich den Achsen durch den Schwerpunkt bezeichnen wir mit einem Index s. Es gilt nun beispielsweise

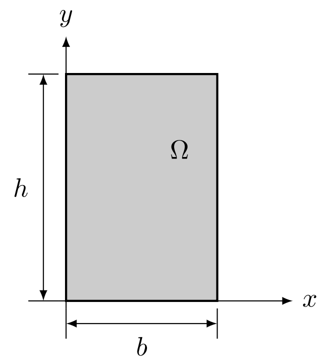
$$\begin{aligned} I_{xs} = \iint_\Omega \overline{y}^2 dA &= \iint_\Omega (y - y_s)^2 dA \\ &= \iint_\Omega (y^2 - 2yy_s + y_s^2) dA \\ &= \underbrace{\iint_\Omega y^2 dA}_{I_x} - \iint_\Omega 2yy_s dA + \iint_\Omega y_s^2 dA \\ &= I_x - 2y_s \underbrace{\iint_\Omega y dA}_{y_s|\Omega|} + y_s^2 \underbrace{\iint_\Omega dA}_{|\Omega|} \\ &= I_x - y_s^2 |\Omega|. \end{aligned}$$

Das Flächenmoment bezüglich parallel verschobenen Achsen erfährt also eine Korrektur von Fläche multipliziert mit dem Abstand der Verschiebung zum Quadrat. Dies ist der Satz von Steiner. Man beachte dass aus dem Minuszeichen vor der Steinerschen Korrektur folgt dass das Flächenmoment minimal ist bezüglich den Achsen durch den Schwerpunkt. Analog haben wir

$$\begin{aligned} I_{ys} &= I_y - x_s^2 |\Omega|, \\ I_{xys} &= I_{xy} + x_s y_s |\Omega|. \end{aligned}$$

Als Anwendungsbeispiel berechnen wir die Flächenmomente des rechteckigen Querschnitts indem wir eine Ecke des Querschnitts in den Koordinatenursprung legen, die Flächenmomente bezüglich diesen Koordinaten berechnen und dann die Flächenmomente bezüglich den Schwerpunktskoordinaten durch die Steinersche Korrektur berechnen.

Der Querschnitt sei also folgendermassen platziert:



Wir haben

$$I_x = \iint_\Omega y^2 dA = \int_0^b \int_0^h y^2 dy dx$$
$$= \int_0^b \frac{h^3}{3} dx = \frac{bh^3}{3}.$$

Die Berechnung hat sich nun gegenüber der direkten Berechnung beüglich Koordinatenachsen durch den Schwerpunkt stark vereinfacht. Die Korrektur nach dem Satz von Steiner ergibt nun

$$I_{xs} = I_x - y_s^2 |\Omega| = \frac{bh^3}{3} - \frac{h^2}{4} bh = \frac{bh^3}{12}.$$

Die Rechnung für I_{ys} verläuft analog. Mit dem Satz von Steiner lassen sich komplizierte Querschnitte, welche aus bekannten Querschnitten aufgebaut sind relativ einfach berechnen. Man bestimmt zuerst die Flächenmomente der einzelnen Teilquerschnitte bezüglich iheren Schwerpunkten und korrigiert dann mit dem Satz von Steiner um den Anteil der Teilquerschnitte bezüglich des Schwerpunktes des totalen Querschnitts zu bestimmen.

6. Potenzreihenentwicklung

6.1. **Einleitung.** Die Linearisierung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ ist die Funktion

$$L(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0).$$

Die Linearisierung ist ein Polynom erster Ordnung in x. Die Approximierung der Funktion $f(x)$ durch ihre Linearisierung im Punkt $x = x_0$ schreiben wir als $f(x) \approx L(x)$. Dies ist keine Gleichung, jedoch gilt

$$f(x_0) = L(x_0), \qquad \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dL}{dx}(x_0),$$

i.e. die Ableitungen nullter und erster Ordnung stimmen im Punkt $x = x_0$ überein. Im folgenden verallgemeinern wir diese Eigenschaften der Linearisierung auf Ableitungen n-ter Ordnung. I.e. für eine gegebene Funktion $f(x)$ und einen Punkt x_0 suchen wir ein Polynom $p_n(x)$ so dass die Ableitungen von $f(x)$ und $p_n(x)$ bis und mit der n-ten Ordnung im Punkt $x = x_0$ übereinstimmen. Ein solches Polynom $p_n(x)$ wird *Taylorpolynom* genannt.

Im folgenden wird stets davon ausgegangen dass die vorkommenden Ableitungen existieren. Für eine präzisere Formulierung der Theorie wäre es jeweils nötig die Differenzierbarkeit der betrachteten Funktionen zur geforderten Ordnung vorauszusetzen.

6.2. **Taylorpolynome.** Sei eine Funktion $f(x)$ und ein Punkt x_0 gegeben. Wir suchen ein Polynom n-ter Ordnung, so dass die Ableitungen dieses Polynoms und die Ableitungen von $f(x)$ im Punkt $x = x_0$ bis und mit der n-ten Ordnung übereinstimmen. Wir bezeichnen das Polynom mit $p_n(x)$. Um die folgenden Betrachtungen zu vereinfachen wählen wir $x_0 = 0$ und verallgemeinern später auf $x_0 \neq 0$. Es muss also gelten[11]

$$\begin{aligned} p(0) &= f(0), \\ p'(0) &= f'(0), \\ p''(0) &= f''(0), \\ &\vdots \\ p^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0) \end{aligned}$$

(die höheren Ableitungen des Polynoms verschwinden, i.e. $p^{(k)}(x) = 0$ für $k > n$). Diese Gleichungen erlauben es die Koeffizienten des Polynoms zu bestimmen.

Wir illustrieren dies an einem Beispiel und studieren den Fall $n = 3$. Wir suchen also das Polynom $p_3(x)$, i.e. die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 in

$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

so dass

$$p(0) = f(0), \qquad p'(0) = f'(0), \qquad p''(0) = f''(0), \qquad p'''(0) = f'''(0).$$

Wir haben

$$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1, \qquad p''(x) = 6a_3x + 2a_2, \qquad p'''(x) = 6a_3.$$

Bei $x = 0$ haben wir

$$p(0) = a_0, \qquad p'(0) = a_1, \qquad p''(0) = 2a_2, \qquad p'''(0) = 6a_3$$

und die Forderung der Gleichheit der Ableitungen bei $x = 0$ liefert

$$a_0 = f(0), \qquad a_1 = f'(0), \qquad 2a_2 = f''(0), \qquad 6a_3 = f'''(0).$$

---

[11] Wir verwenden die Notation: $f'(x) = \frac{df}{dx}(x), f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x), \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}(x)$.

Aus diesen Gleichungen folgen die Ausdrücke für die Koeffizienten des Polynoms

$$a_0 = f(0), \qquad a_1 = f'(0), \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2}, \qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{6}.$$

Das gesuchte Polynom lautet also

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3.$$

Die Koeffizienten des Polynoms sind durch die Ableitungen der gegebenen Funktion $f(x)$ im gegebenen Punkt $x_0 = 0$ bestimmt.

Um das Beispiel zu konkretisieren wählen wir für die gegebene Funktion $f(x) = e^x$. Wir haben

$$f^{(n)}(x) = e^x.$$

Somit gilt

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

und das Taylorpolynom dritter Ordnung von $f(x) = e^x$ im Punkt $x_0 = 0$ lautet

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Um einen allgemeinen Ausdruck für die Koeffizienten a_k herzuleiten, leiten wir das Polynom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

k-mal ab und setzen $x = 0$. Wir erhalten

$$p_n^{(k)}(0) = k!\, a_k,$$

wobei der Faktor $k!$ durch wiederholtes Ableiten auftaucht. Somit gilt für den Koeffizienten a_k

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(0)}{k!}$$

und aus der Forderung dass die Ableitungen des Polynoms $p_n(x)$ (bis und mit Ordnung n) mit den Ableitungen der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ übereinstimmen sollen folgt

$$a_k = \frac{p_n^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Dies ist der gesuchte allgemeine Ausdruck für die Koeffizienten des Taylorpolynoms. Das Taylorpolynom von $f(x)$ zur Ordnung n im Punkt $x_0 = 0$ lautet somit

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \end{aligned}$$

Wird das Taylorpolynom in einem allgemeinen Punkt x_0 gesucht (i.e. nicht zwingend bei $x_0 = 0$), so sind die Ableitungen der Funktion $f(x)$ bei x_0 auszuwerten und es ergibt sich ein Polynom n-ter Ordnung in $x - x_0$. I.e. das *Taylorpolynom* von $f(x)$ der Ordnung n im Punkt $x = x_0$ ist gegeben durch

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Als Beispiel bestimmen wir das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion $f(x) = \log(x)$ im Punkt $x_0 = 1$. Wir haben

$$f(x) = \log(x), \qquad f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

und somit gilt

$$f(1) = 0, \qquad f'(1) = 1, \qquad f''(1) = -1, \qquad f'''(1) = 2.$$

Die Koeffizienten sind somit

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a_3 = \frac{1}{3}$$

und das Taylorpolynom dritter Ordnung von $\log(x)$ im Punkt $x_0 = 1$ lautet

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} a_k(x-x_0)^k \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3. \end{aligned}$$

6.3. **Restglied.** Wir betrachten nun die Differenz zwischen der Funktion $f(x)$ und dem Taylorpolynom $p_n(x)$. Diese Differenz wird als *Restglied* bezeichnet und entspricht dem Fehler der gemacht wird wenn an Stelle von $f(x)$ die Approximation $p_n(x)$ verwendet wird, i.e. das Restglied ist der Fehler der Approximation $f(x) \approx p_n(x)$.

Wir leiten den Ausdruck für das Restglied für den Fall des Taylorpolynoms erster Ordnung her. Zuerst schreiben wir die Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Fundamentalsatzes als

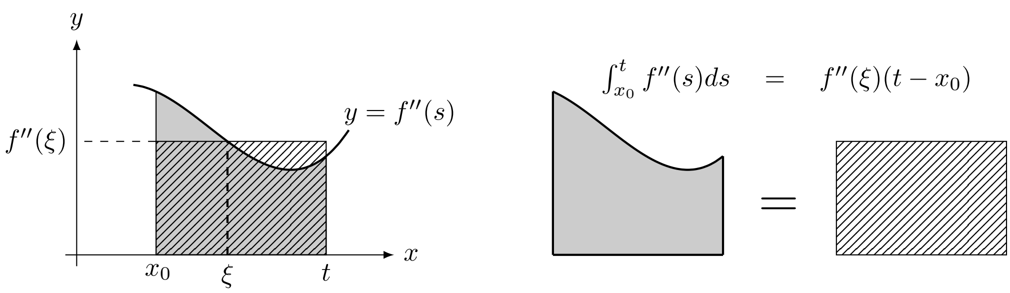
$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Die Ableitung $f'(t)$ schreiben wir in der selben Form, wieder mit Hilfe des Fundamentalsatzes,

$$f'(t) = f'(x_0) + \int_{x_0}^{t} f''(s)ds.$$

Nun betrachten wir das Integral auf der rechten Seite. Wie aus der untenstehenden Grafik ersichtlich ist, existiert ein $\xi \in [x_0, t]$ so dass

$$\int_{x_0}^{t} f''(s)ds = f''(\xi)(t-x_0).$$



Verwenden dieser Gleichung in der Gleichung für $f'(t)$ ergibt

$$f'(t) = f'(x_0) + f''(\xi)(t-x_0)$$

und dieser Ausdruck, eingesetzt in der Gleichung für $f(x)$, ergibt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \big(f'(x_0) + f''(\xi)(t - x_0)\big)\, dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\xi) \int_{x_0}^{x} (t - x_0) dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

I.e. wir erhalten

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{=p_1(x):\,\text{Taylorpolynom 1. Ordnung}} + \underbrace{\frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2}}_{\text{Restglied}}.$$

Allgemein gilt

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x),$$

wobei

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{Taylorpolynom,} \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \text{Restglied} \end{aligned}$$

und ξ zwischen x_0 und x liegt.

Bemerkungen:

(i) Das Restglied ist von der gleichen Form wie die Terme im Taylorpolynom, jedoch wird die Ableitung nicht bei x_0 sonder bei ξ ausgewertet.
(ii) ξ ist im allgemeinen nicht bekannt.
(iii) $R_n(x)$ liefert meist eine Fehlerabschätzung zwischen $f(x)$ und der Approximation durch das Taylorpolynom (siehe Beispiel unten).

Als Beispiel einer Fehlerabschätzung betrachten wir die Approximation der Funktion $f(x) = e^x$ durch ihr Taylorpolynom zweiter Ordnung im Punkt $x_0 = 0$. Das Restglied hängt von x ab und somit muss ein Intervall (welches x_0 enthält) betrachtet werden um in diesem Intervall den Fehler abzuschätzen. Wir betrachten das Intervall $[0, 1]$. Das Taylorpolynom ist

$$p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Das Restglied ist

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x^3 = \frac{e^\xi}{3!} x^3.$$

Dieses Restglied schätzen wir wie folgt ab. Da $\xi \in [0, 1]$, folgt

$$e^\xi \leq e^1 = e.$$

Da $x \in [0, 1]$, folgt

$$x^3 \leq 1.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgern wir für das Restglied

$$R_2(x) = \frac{e^\xi}{3!} x^3 \leq \frac{e}{6} = 0.45\ldots$$

I.e. der Fehler den man begeht, wenn man, im Intervall $[0,1]$, $p_2(x)$ an Stelle von e^x verwendet beträgt maximal $0.45\ldots$

6.4. **Taylorreihe.** Im Prinzip kann man Taylorpolynome beliebiger Ordnung bestimmen. Wir definieren den Ausdruck

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

als *Taylorreihe* der Funktion $f(x)$ mit Zentrum x_0. Im Spezialfall $x_0 = 0$ heisst der Ausdruck *MacLaurin-Reihe.* Die obige Definition macht nur Sinn falls der Grenzwert existiert. Wir betrachten die Situation im folgenden für $x \in I \subset \mathbb{R}$. Falls

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in I,$$

dann folgt dass der obige Grenzwert existiert und dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \text{für} \quad x \in I,$$

i.e. in diesem Fall ist die Funktion $f(x)$ durch ihre Taylorreihe gegeben. Das Intervall $I \subset \mathbb{R}$ kann auch die gesamte reelle Achse sein.

Wir betrachten das Beispiel der Exponentialfunktion, i.e. $f(x) = e^x$, auf der gesamten reellen Achse, i.e. $I = \mathbb{R}$ mit $x_0 = 0$. Das Taylorpolynom ist

$$\begin{aligned}p_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Das Restglied ist

$$\begin{aligned}R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}.\end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Grenzwert dieses Ausdrucks für $n \to \infty$. Wir müssen somit den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

für ein beliebiges (aber festes) $x \in \mathbb{R}$ bestimmen. Wir haben

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x\cdot x\cdot x\cdots x}{1\cdot 2\cdot 4\cdots n}$$

Für ein festes $x \in \mathbb{R}$ gibt es nun ein $m \in \mathbb{N}$ so dass

$$\frac{x}{m} < 1.$$

Es folgt somit

$$\begin{aligned}\frac{x^n}{n!} &= \underbrace{\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{m-1}}_{=C}\cdot\underbrace{\frac{x}{m}\cdot\frac{x}{m+1}\cdots\frac{x}{n}}_{\text{alle Faktoren}<1} \\ &= C\cdot\frac{x}{m}\cdot\frac{x}{m+1}\cdots\frac{x}{n}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< C \cdot \underbrace{\frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \cdots \frac{x}{m}}_{n-(m-1) \text{ Faktoren}} \\
&= C \left(\frac{x}{m}\right)^{n-(m-1)}.
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\lim_{n\to\infty} C \underbrace{\left(\frac{x}{m}\right)}_{<1}^{n-(m-1)} = 0
$$

folgt

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.
$$

Somit gilt

$$
\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^{\xi} \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.
$$

Das Restglied verschwindet also für $n \to \infty$, die Taylorreihe existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$
e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.
$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin(x)$ bei $x_0 = 0$. Wir haben

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \sin(0) = 0, \\
f'(0) &= \cos(0) = 1, \\
f''(0) &= -\sin(0) = 0, \\
f^{(3)}(0) &= -\cos(0) = -1, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Wir sehen dass die Ableitungen gerader Ordnung verschwinden und sich für die Ableitungen ungerader Ordnung jeweils die Werte 1 und -1 abwechseln. Das Taylorpolynom lässt sich somit schreiben als

$$
p_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots \pm \frac{x^n}{n!}.
$$

wobei wir für den letzten Term $+$ verwenden wenn n gerade ist und $-$ wenn n ungerade ist. Dies lässt sich mit einer Summer folgendermassen schreiben

$$
p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}
$$

(man verwendet den Index k und die ungeraden Terme bekommt man durch $2k+1$, da man bei $k = 0$ startet). Das Restglied ist

$$
R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.
$$

Für die Fehlerabschätzung betrachten wir wieder $I = \mathbb{R}$. Wir haben

$$
\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| = \begin{cases} |\cos(\xi)| & : n \text{ gerade}, \\ |\sin(\xi)| & : n \text{ ungerade}. \end{cases}
$$

Aus

$$|\cos(\xi)| \leq 1, \qquad |\sin(\xi)| \leq 1$$

folgt

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Der Grenzwert der rechten Seite für $n \to \infty$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

(die Begründung ist identisch mit derjenigen für die Exponentialfunktion) und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Somit gilt

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Analog findet man

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Wir sehen dass die ungerade Funktion $\sin(x)$ nur Terme mit ungeraden Potenzen besitzt und die gerade Funktion $\cos(x)$ nur Terme mit geraden Potenzen.

Die wichtigsten Taylorreihen sind

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots, \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} + \dots.
\end{aligned}$$

(nur die ersten drei dieser Taylorreihen existieren auf ganz $\mathbb{R}$).

6.5. **Methoden der Reihenentwicklung.** Wir illustrieren die Methoden an Hand von Beispielen.

6.5.1. *Summen.* Aus

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots
\end{aligned}$$

folgt

$$\sin(x) + e^x = 1 + 2x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{2x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

6.5.2. *Produkte.* Aus

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

folgt

$$\begin{aligned} e^x \sin(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) \\ &= x + x^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) x^3 + \ldots \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \ldots. \end{aligned}$$

6.5.3. *Quotienten.* Im folgenden bestimmen wir die Reihenentwicklung der Funktion $\tan(x)$ im Punkt $x_0 = 0$ aus den bekannten Reihenentwicklungen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$. Wir haben

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

Wir machen den Ansatz

$$\tan(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

Im folgenden bestimmen wir die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ dieses Ansatzes. Multiplikation der Gleichung

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

mit $\cos(x)$ ergibt

$$\tan(x)\cos(x) = \sin(x).$$

Nun substituieren wir die bekannten Reihenentwicklungen und den Ansatz. Die Gleichung wird zu

$$\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

Ausmultiplizieren auf der linken Seite ergibt

$$a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right) x^2 + \left(-\frac{a_1}{2} + a_3\right) x^3 + \ldots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 - \frac{a_0}{2} = 0, \qquad -\frac{a_1}{2} + a_3 = -\frac{1}{3!}, \qquad \ldots$$

Die ersten beiden Gleichungen bestimmen a_0 und a_1. Aus der dritten Gleichung folgt $a_2 = \frac{a_0}{2} = 0$ und aus der vierten Gleichung folgt $a_3 = -\frac{1}{3!} + \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Dieser Prozess kann beliebig fortgesetzt werden und somit können alle Koeffizienten des Ansatzes für $\tan(x)$ bestimmt werden. Wir haben

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$

6.5.4. *Verschachtelung.* Aus

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

folgt durch Substitution

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots . \end{aligned}$$

Als Beispiel entickeln wir die Funktion

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

bis zur vierten Ordnung. Wir haben

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots , \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots . \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots .$$

6.5.5. *Eulers Formel.* Wir haben

$$\begin{aligned} e^{jx} &= 1 + (jx) + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - \frac{jx^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{jx^5}{5!} + \dots \\ &= \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}_{=\cos(x)} + j \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)}_{=\sin(x)} \\ &= \cos(x) + j\sin(x), \end{aligned}$$

i.e. wir finden Eulers Formel

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x).$$

6.5.6. *Differenzieren.* Die Differentiation kann Term für Term durchgeführt werden. Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin(x) &= \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots , \\ &= \cos(x). \end{aligned}$$

6.5.7. *Integration.* Auch die Integration kann Term für Term ausgeführt werden. Beispielsweise kann die folgende nicht elementar integrierbare Funktion integriert werden

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx &= \int_0^t \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) dx \\
&= \int_0^t \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots \right) dx \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots \right) \Bigg|_0^t \\
&= t - \frac{t^3}{3 \cdot 3!} + \frac{t^5}{5 \cdot 5!} + \dots .
\end{aligned}$$

Aufgaben

Aufgabe 1

Man finde die Menge aller Stammfunktionen für:

(i) $f(x) = 4$
(ii) $f(x) = 4x$
(iii) $f(x) = 2x + 7$
(iv) $f(x) = \frac{1}{2x}$
(v) $f(x) = 8x^7$
(vi) $f(x) = e^{4x}$
(vii) $f(x) = x^n$
(viii) $f(x) = -\cos(x) + \sin(x)$
(ix) $f(x) = \cos(2x)$

Aufgabe 2

Man bestimme zu den folgenden Funktionen eine Stammfunktion.

(i) $f(x) = \sin(\pi x)$
(ii) $x(f) = f^6$
(iii) $h(t) = e^{-2t}$
(iv) $\sigma(v) = \cos(v/3)$

Aufgabe 3

Man bestimme zu den folgenden Funktionen eine Stammfunktion (Hinweis: Für (iii) benutze man $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

(i) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
(ii) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
(iii) $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$
(iv) $f(x) = e^{1-x}$

Aufgabe 4

Man bestimme eine Stammfunktion der Betragsfunktion $f(x) = |x|$.

Aufgabe 5

Ein Körper habe zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $v(0) = v_0$ und Position $s(0) = s_0$. Es gelte $a(t) = a =$ konst. Man bestimme die Position in Abhängigkeit der Zeit, i.e. $s(t)$.

Aufgabe 6

Ein Massenpunkt sei zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $s_0 = 3$ und habe die Geschwindigkeit $v_0 = 5$. Man bestimme seine Position in Abhängigkeit der Zeit wenn er mit $a(t) = 2 + t - \frac{1}{2}t^2$ beschleunigt wird.

Aufgabe 7

Die Beschleunigung eines Körpers sei $a(t) = e^{\frac{1}{2}t}$. Zur Zeit $t = 0$ hat der Körper die Geschwindigkeit $v_0 = 3$ und die Position $s_0 = 0$. Man finde $s(t)$.

Aufgabe 8

Die Position eines Körpers sei gegeben durch $s(t) = 2e^{-t} + 2t^3 + 3t^2 + 1$.

(i) Man berechne den Ruck (Ableitung der Beschleunigung) zur Zeit $t = 0$ und $t = 3$.

(ii) Man schreibe die Ausdrücke für die die Position $s(t)$, Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ mit Einheiten.

Aufgabe 9

Ein Körper erfährt die Beschleunigung $a = -2$. Welchen Weg legt er in der Zeit von $t = 0$ bis $t = 3$ zurück, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 1$ und die Anfangsposition $s_0 = 16$ beträgt. Hinweis: Der zurückgelegte Weg entspricht nicht direkt der Position $s(t)$.

Aufgabe 10

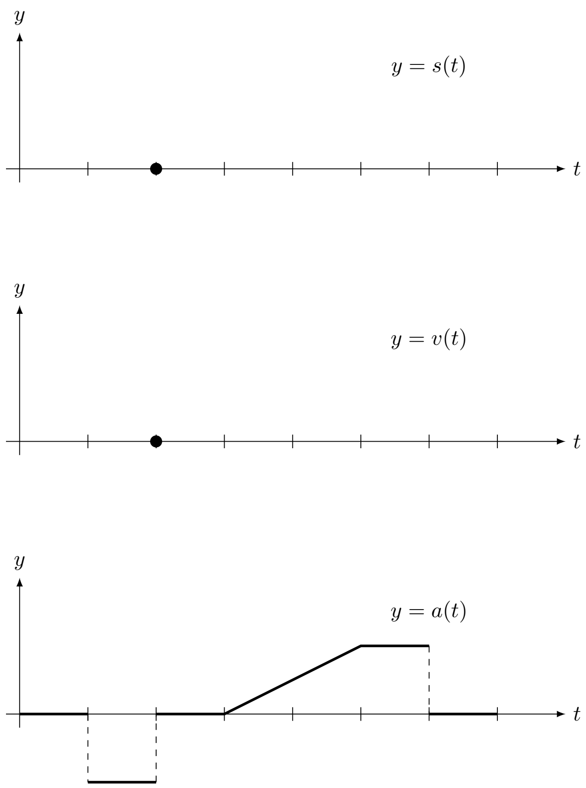
Es sei der Ruck $r(t) = r_0 = \text{konst.}$ gegeben. Weiter gelte $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ und $a(0) = a_0$. Man bestimme die Position $s(t)$.

Aufgabe 11

Ein Körper erfährt die Beschleunigung $a(t) = t^2$. Es gelte $s(0) = 11/12$, $s(1) = 2$. Man bestimme $s(t)$.

Aufgabe 12

Zu dem gegebenen Beschleunigungsverlauf $y = a(t)$ zeichne man qualitativ den Verlauf der Geschwindigkeit $y = v(t)$ und der Position $y = s(t)$, durch die gegebenen Punkte.



Aufgabe 13

Man berechne das Integral

$$\int_0^1 x^2 dx$$

als Grenzwert einer Folge von Riemannschen Obersummen. Hinweis:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Aufgabe 14

Man berechne die Riemannsche Summe S_4 der Funktion $f(x) = x^2 - 1$ auf dem Intervall $[0, 2]$. Man zerlege dazu das Intervall in vier Teilintervalle (der gleichen Länge) und wähle die ξ's

(i) am linken Rand, (ii) am rechten Rand, (iii) in der Mitte.

Aufgabe 15

Man berechne die folgenden Integrale mit Hilfe von bekannten Flächeninhalten.

$$\text{(i)} \quad \int_2^6 (x-3)dx, \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx.$$

Aufgabe 16

Man berechne die folgenden Integrale mit Hilfe von geometrischen Betrachtungen.

$$\text{(i)} \quad \int_0^{2\pi} \cos(x)dx, \qquad \text{(ii)} \quad \int_{-1}^{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \qquad \text{(iii)} \quad \int_0^2 |x-1|dx.$$

Aufgabe 17

Man berechne das Integral

$$I = \int_0^2 x^3 dx,$$

(i) als Grenzwert einer Folge von Riemannschen Obersummen,
(ii) mit Hilfe des Fundamentalsatzes.

Hinweis:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

Aufgabe 18

Man bestimme die folgenden unbestimmten Integrale, ohne die Potenzen zu entwickeln.

(i) $\int (x-1)^5 dx$
(ii) $\int (2x+1)^4 dx$
(iii) $\int (2-5x)^3 dx$
(iv) $\int (1-x)^{-4} dx$

Aufgabe 19

Man bestimme die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\int \sin(1-x)dx$
(ii) $\int (1-e^{-x})dx$
(iii) $\int \frac{x+1}{x}dx$
(iv) $\int (2x+1)^{-1}dx$
(v) $\int \sum_{k=1}^{10} x^k dx$
(vi) $\int \sqrt{1+4x}dx$

Aufgabe 20

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

(i) $\int \cos(at)dt$ mit $a \in \mathbb{R}$
(ii) $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$
(iii) $\int \frac{t}{t^2+1}dt$
(iv) $\int (u^2+au)du$ mit $a \in \mathbb{R}$
(v) $\int (1-e^{-\lambda t})dt$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$
(vi) $\int \cos(x)e^{4\sin(x)}dx$
(vii) $\int \frac{3}{4+y^2}dy$
(viii) $\int \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}dt$ mit $a \in \mathbb{R}$

Hinweis: Für (vii) benutze man $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 21

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$. Man bestimme die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\displaystyle\int f(x+1)dx$
(ii) $\displaystyle\int f(2x)dx$
(iii) $\displaystyle\int f(1-4x)dx$
(iv) $\displaystyle\int f(x/2)dx$
(v) $\displaystyle\int xf(x^2)dx$
(vi) $\displaystyle\int e^{f(x)}\frac{df}{dx}(x)dx$

Aufgabe 22

Man bestimme die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\displaystyle\int (-2x^3+2x+2)dx$
(ii) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2}dx$
(iii) $\displaystyle\int (\sin(t)+\cos(2t))dt$
(iv) $\displaystyle\int \frac{1-2x+3x^3-x^4}{2}dx$

Aufgabe 23

Man betrachte die folgende stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ -2(x-1) & 1 \leq x < 1.5 \\ -1 & 1.5 \leq x \end{cases}$$

Man finde eine stetige Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

Aufgabe 24

Man berechne die untere und die obere Riemannsche Summe 6. Ordnung für die Funktion $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$.

Aufgabe 25

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Man berechne das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Aufgabe 26

Man bestimme das Integral $\displaystyle\int_{0}^{-1} xdx$.

Aufgabe 27

Man bestimme die folgenden Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^2 (-2x^3 + 2x + 2)dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) dx$

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin(t) + \cos(2t))dt$

(iv) $\displaystyle\int_1^2 e^{1-x}dx$

Aufgabe 28

Man bestimme

(i) $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \sqrt{x^2+1}dx\right)$

(ii) $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(\int_t^{-3} \sin^2(x)dx\right)$

(iii) $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(\int_{-t}^t \frac{1}{1+x^2}dx\right)$

(iv) $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(\int_0^2 \sqrt{x^2+1}dx\right)$

Aufgabe 29

Man bestimme die Fläche zwischen den Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = 3 - 2x$.

Aufgabe 30

Man bestimme die Fläche welche durch $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ und $y = x - 2$ begrenzt wird.

Aufgabe 31

Man bestimme die Fläche des Gebietes, welches durch die Parabeln $y = 6x - x^2$ und $y = x^2 - 2x$ begrenzt wird.

Aufgabe 32

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$ und das Gebiet

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}.$$

(i) Man zeichne das Gebiet und den Graph von $f(x)$.
(ii) Der Graph von $f(x)$ teilt das Gebiet D in zwei Teilmengen. Man berechne deren Flächeninhalt.
(iii) Wie gross muss der Parameter a gewählt werden, damit der Graph von $g(x) = ax^3$ das Gebiet D in zwei Teile mit dem gleichen Flächeninhalt teilt?

Aufgabe 33

Man berechne den Flächeninhalt des Gebiets begrenzt durch $y = xe^{-x^2}$, $y = x + 1$, $x = 2$ und der y-Achse.

Aufgabe 34

Man berechne den Flächeninhalt des Gebiets begrenzt durch $y = 2x^2 + 10$ und $y = 4x + 16$.

Aufgabe 35

Man berechne den Flächeninhalt des Gebiets begrenzt durch $y = 2x^2 + 10$ und $y = 4x + 16$ im Bereich $-2 \leq x \leq 5$.

Aufgabe 36

Man bestimme den Flächeninhalt des Gebiets begrenzt durch $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $x = 0$ und $x = \pi/2$.

Aufgabe 37

Man bestimme den Flächeninhalt des Gebiets begrenzt durch $x = \frac{1}{2}y^2 - 3$, $y = x - 1$.

Aufgabe 38

Man bestimme den Flächeninhalt des Gebiets begrenzt durch $x = -y^2 + 10$, $x = (y - 2)^2$.

Aufgabe 39

Wir betrachten das Gebiet in der x-y-Ebene, begrenzt durch $y = x^2 - 4x + 5$, $x = 1$, $x = 4$ und der x-Achse. Man berechne das Volumen welches erzeugt wird durch Rotation dieses Gebiets um die x-Achse.

Aufgabe 40

Wir betrachten das Gebiet in der x-y-Ebene, im ersten Quadranten, begrenzt durch $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x/4$. Man berechne das Volumen welches entsteht wenn man dieses Gebiet um die y-Achse rotiert.

Aufgabe 41

Wir betrachten das Gebiet in der x-y-Ebene, begrenzt durch $y = x^2 - 2x$ und $y = x$. Man berechne das Volumen welches entsteht wenn man dieses Gebiet um die Achse $y = 4$ rotiert.

Aufgabe 42

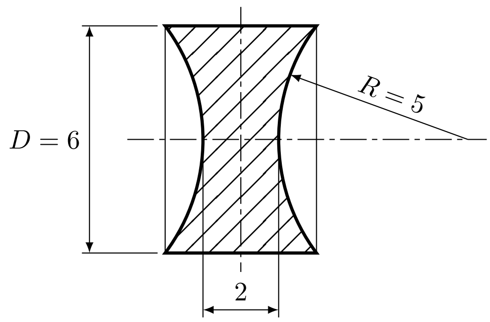
Wir betrachten das Gebiet in der x-y-Ebene, begrenzt durch $y = 2\sqrt{x-1}$ und $y = x - 1$. Man berechne das Volumen welches entsteht wenn man dieses Gebiet um die Achse $x = -1$ rotiert.

Aufgabe 43

In der x-y-Ebene befindet sich ein Kreis mit Radius r und Ursprung am Punkt $(0, R)$. Man berechne das Volumen das entsteht wenn man diesen Kreis um die x-Achse rotiert. Hinweis: Das auftretende Integral kann mit Hilfe einer bekannten Fläche berechnet werden (oder mit Substitution, siehe später).

Aufgabe 44

Eine Zerstreuungslinse (auf beiden Seiten konkav) besitzt den folgenden Querschnitt (Angaben in cm):



Hier ist $D = 6$ der Durchmesser der Linse und $R = 5$ ist der Radius mit welchem die Linse geschliffen wurde. Man bestimme das Volumen der Linse mit Hilfe von Integralrechnung.

Aufgabe 45

Man berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

im Intervall $[0, a]$.

Aufgabe 46

Sei

$$f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}.$$

Man bestimme die Bogenlänge des Graphen $y = f(x)$ im Intervall $x \in [1, 4]$. Hinweis: Binomische Formeln benutzen.

Aufgabe 47

Man berechne das Integral

$$\int_1^3 x^2 dx$$

(i) mit dem Fundamentalsatz,
(ii) durch die Definition des Integrals unter Verwendung von Obersummen und
(iii) durch die Definition des Integrals unter Verwendung von Untersummen.

Hinweise:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Aufgabe 48

Man berechne die folgenden Integrale durch Substitution.

(i) $\displaystyle\int \frac{6x^2}{(1-4x^3)^3}dx$ (ii) $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos(x)dx$ (iii) $\displaystyle\int \frac{6x^2-5}{2x^3-5x+6}dx$

Aufgabe 49

Man berechne die folgenden Integrale mit Hilfe von Substitution.

(i) $\displaystyle\int 18x^2\sqrt[4]{6x^3+5}dx$

(ii) $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{w}\right)\cos(w-\log(w))dw$

(iii) $\displaystyle\int 3(8y-1)e^{4y^2-y}dy$

(iv) $\displaystyle\int x^2(3-10x^3)^4dx$

(v) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(vi) $\displaystyle\int \sin(1-x)(2-\cos(1-x))^4dx$

(vii) $\displaystyle\int \cos(3z)\sin^{10}(3z)dz$

Aufgabe 50

Man berechne das Integral

$$\int \sin^3(x)dx.$$

Hinweis: Man schreibe $\sin^3(x) = \sin^2(x)\cdot\sin(x)$, verwende die Pythagorasidentiät der Trigonometrie und verwende eine Substitution für die Integration.

Aufgabe 51

Man berechne die Integrale

(i)

$$\int \frac{\log(x)}{x}dx, \qquad \text{Mit der Substitution } u = \log(x),$$

(ii)

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx, \qquad \text{Mit der Substitution } x = u^2-1$$

Aufgabe 52

Man berechne die folgenden Integrale mit Substitution:

(i) $\int xe^{x^2}dx$

(ii) $\int \sin(s)\cos^n(s)ds, \quad n \neq -1$

(iii) $\int \frac{1}{x(1+(\log(x))^2)}dx$

(iv) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$

(v) $\int u^3\sqrt{u^4+1}du$

(vi) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

(Hinweis: Für (iii) benutze man $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$).

Aufgabe 53

Man berechne die folgenden Integrale mit Substitution:

(i) $\int \frac{3}{5y+4}dy$

(ii) $\int \frac{3y}{5y^2+4}dy$

(iii) $\int \frac{3y}{(5y^2+4)^2}dy$

(iv) $\int \frac{3}{5y^2+4}dy$

(Hinweis: Für (iv) benutze man $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$).

Aufgabe 54

Man bestimme die folgenden Integrale mit der Methode der partiellen Integration

(i) $\int x\sin(x)dx$

(ii) $\int x^2\log(x)dx$

(iii) $\int x\sqrt{1+x}dx$

(iv) $\int x^2\sin(x)dx$

(v) $\int \frac{\log(x)}{x}dx$

(vi) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx$

Aufgabe 55

Man führe die Partialbruchzerlegung für die folgenden Brüche durch:

(i)

$$\frac{x}{x^2-1},$$

(ii)

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)}.$$

Aufgabe 56

Man bestimme

(i)

$$\int \frac{x^2+2}{x-1}dx.$$

(ii)

$$\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}dx,$$

mit dem Wissen dass $x=2$ eine Nullstelle des Nenners ist.

Aufgabe 57

Man bestimme die folgenden Integrale mit Hilfe von Partialbruchzerlegung

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}dx$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3-x}dx$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$
($x=1$ ist Nullstelle des Nennerpolynoms.)

(iv) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-x^2}dx$

(v) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+7x+12}dx$

(vi) $\displaystyle\int \frac{x^2+x-2}{x^4-3x^3+4x}dx$
($x=2$ ist Nullstelle des Nennerpolynoms)

Aufgabe 58

Man bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht wenn man den Graphen der Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ für $x\in[1,\infty)$ um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 59

Man bestimme die folgenden Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

Hinweis zu (ii): Man unterteile das Integrationsgebiet: $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{b} + \int_{b}^{\infty}$ (für ein $b\in\mathbb{R}$), man benutze $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)$.

Aufgabe 60

Man bestimme ob die folgenden Integrale konvergent oder divergent sind. Falls ein konvergentes Integral vorliegt bestimme man dieses Integral.

(i) $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 u\log(u)du$

(iii) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x}dx$

(iv) $\displaystyle\int_0^\infty te^{-t^2}dt$

(v) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(vi) $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x)dx$

(vii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

Hinweis: Man berechne (ii) durch partielle Integration und verwende $\lim_{x\to 0} x^n\log(x) = 0$ für $n\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 61

(i) Sei $f(x)$ eine gerade Funktion. Man zeige dass gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

(ii) Sei $f(x)$ eine ungerade Funktion. Man zeige dass gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Hinweis: Man teile das Integral auf in $\int_{-a}^{a}\cdots = \int_{-a}^{0}\cdots + \int_{0}^{a}$, vertausche beim ersten Integral die Grenzen und verwende die Substitution $u = -x$.

Aufgabe 62

Man bestimme die folgenden Integrale mit partieller Integration:

(i) $\displaystyle\int_{0}^{4} xe^{-x}dx$

(ii) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin(x)dx$

(iii) $\displaystyle\int_{1}^{2} x\log(x)dx$

(iv) $\displaystyle\int_{1}^{3} \log(x^3)dx$

Aufgabe 63

Man bestimme die folgenden Integrale mit Substitution:

(i) $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{x^2}dx$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx$

(iii) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 5\cos^2(x)\sin(x)dx$

(iv) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{x^3+1}dx$

Aufgabe 64

Ein Heliumballon startet am Erdboden senkrecht nach oben. Seine Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit t ist gegeben durch

$$v(t) = \frac{10}{t^2+2t+1}.$$

(i) Man bestimme die Geschwindigkeit und Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 0$.

(ii) Man bestimme die Höhe, welche der Ballon maximal erreichen könnte.

(iii) Man bestimme den Zeitpunkt, in welchem der Ballon die Hälfte der Maximalhöhe erreicht hat und die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

Aufgabe 65

Ein Dachdecker transportiert Material auf das Dach indem er es in einem Korb verstaut und den Korb mit einer Kette vom Dach aus hochzieht. Die Masse des Korbes mit Inhalt beträgt 50 (sämtliche Angaben in SI-Einheiten). Die Dachhöhe beträgt 20. Im folgenden soll mit einer Gravitationskonstanten von 10 gerechnet werden.

(i) Die Masse der Kette sei vernachlässigbar. Man bestimme die mechanische Arbeit die beim Hochheben des Materials verrichtet wird.

(ii) Die Kette hat eine Masse pro Meter Länge von 1. Man bestimme die mechanische Arbeit die beim Hochheben des Materials verrichtet wird.

Aufgabe 66

Ein Komet welcher zum Zeitpunkt $t = 0$ in die Erdatmosphäre eintritt erfährt in guter Näherung die Beschleunigung (sämtliche Angaben in SI-Einheiten):

$$a(t) = -10e^{-2t}.$$

(i) Man bestimme die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit, wenn der Komet beim Eintritt eine Geschwindigkeit von 10 aufweist.

(ii) Man bestimme den zurückgelegten Weg in der Atmosphäre in Abhängigkeit der Zeit.

Aufgabe 67

(i) Man bestimme

$$\text{(a)} \quad \frac{d}{dt}\int_0^t \arccos(x)dx, \qquad \text{(b)} \quad \frac{d^2}{dt^2}\int_t^{17} \cos(4x)dx.$$

(ii) Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion. Der Graph $y = f'(x)$ entspricht dem Halbkreis in der oberen Hälfte der x-y-Ebene, mit Zentrum im Ursprung und Radius $r = 4$. Man finde $f(-4)$, falls $f(4) = 7$ gilt.

Aufgabe 68

Man finde die gesuchten Funktionswerte.

(i) $f(x, y) = x^2 + xy^3$
- $f(0, 0)$
- $f(-1, 1)$
- $f(2, 3)$
- $f(-3, -2)$

(ii) $f(x, y) = \sin(xy)$
- $f(2, \pi/6)$
- $f(-3, \pi/12)$
- $f(\pi, 1/4)$
- $f(-\pi/2, -7)$

Aufgabe 69

Man finde und skizziere den Definitionsbereich und finde den Wertebereich der folgenden Funktionen.

(i) $f(x, y) = \log(x + y)$

(ii) $g(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

(iii) $h(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

(iv) $k(x, y) = \sqrt{3x^2 + 2y^2 - 6}$

(v) $l(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 16} + \log(x) + \log(-y)$

* Aufgabe 70

Seien $0 < b < a$ gegeben und sei $c > 0$ so dass $c^2 = a^2 - b^2$. Wir betrachten die zwei Punkte $F_1(c, 0)$ und $F_2(-c, 0)$ auf der x-Achse. Wir betrachten eine Kurve in der x-y-Ebene, so dass die Länge der Verbindungslinie von F_1, zu einem Punkt auf der Kurve (x, y) plus die Länge der Verbindungslinie zwischen dem Punkt (x, y) auf der Kurve und dem Punkt F_2 gleich $2a$ ist. Man zeige dass es sich bei dieser Kurve um eine Ellipse mit Halbachse a und b handelt. Dies ist die Gärtnerkonstruktion einer Ellipse.

Hinweis: Die obige Bedingung führt auf die Gleichung

$$\sqrt{(c - x)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a.$$

Man eliminiere die Wurzel durch zweimaliges Quadrieren dieser Gleichung.

Aufgabe 71

(i) Man zeige dass die Kurve

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t < 2\pi$$

eine Ellipse in der x-y-Ebene beschreibt.

(ii) Man finde eine Kurve $\overrightarrow{r}(t)$, welche eine Ellipse mit Zentrum bei $(5, -8)$, Halbachsen parallel zu den Koordinatenachsen, grosser Halbachse 3 (parallel zur x-Achse) und kleiner Halbachse 2 (parallel zur y-Achse) beschreibt.

Aufgabe 72

Für die folgenden Funktionen finde und skizziere man den Definitionsbereich.

(i) $f(x,y) = \sqrt{y - x - 2}$

(ii) $f(x,y) = \frac{(x-1)(y+2)}{(y-x)(y-x^3)}$

(iii) $f(x,y) = \arccos(y - x^2)$

(iv) $f(x,y) = \sqrt{(x^2-4)(y^2-9)}$

Aufgabe 73

Man finde eine kartesische Gleichung für den Graphen der folgenden Funktionen.

(i) $f(x,y) = 2$

(ii) $f(x,y) = -y + 2$

(iii) $f(x,y) = 3 - \frac{1}{4}(3x + 6y)$

Aufgabe 74

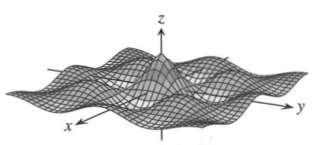
Man beschreibe die Graphen der folgenden Funktionen:

(i) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

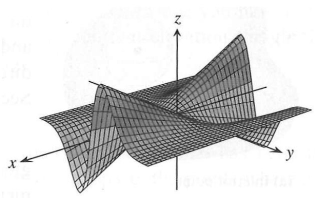
(ii) $f(x,y) = x^2 + y^2$

Aufgabe 75

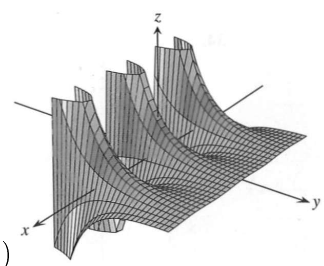
Man ordne den Folgenden Graphen die entsprechenden Höhenlinien zu.
Graphen:



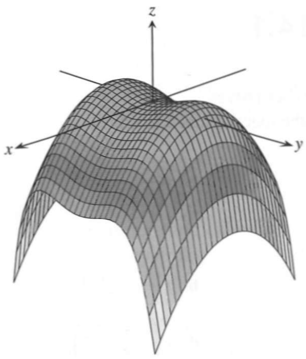
(i)

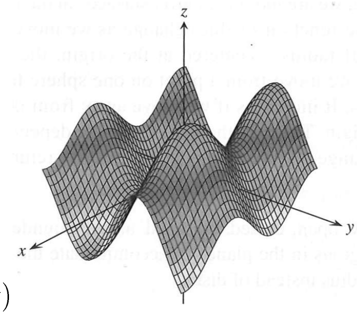


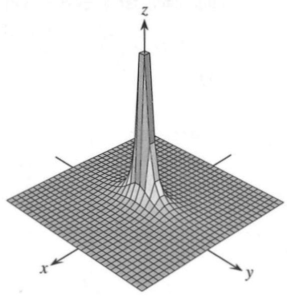
(ii)

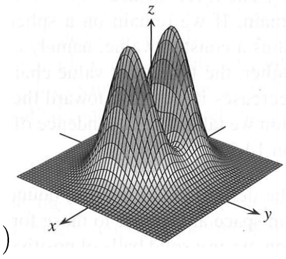


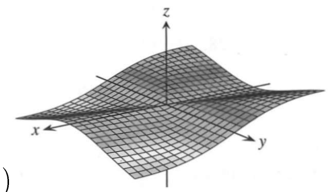
(iii)

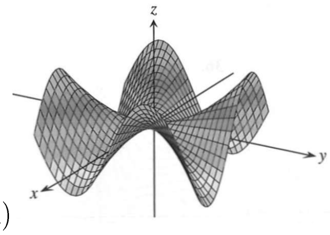

(iv)


(v)

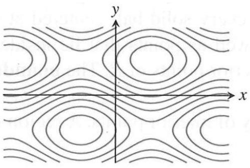

(vi)

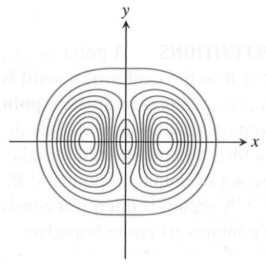

(vii)

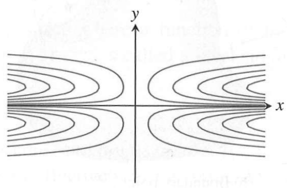

(viii)

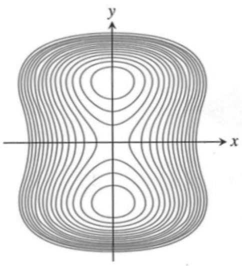

(ix)

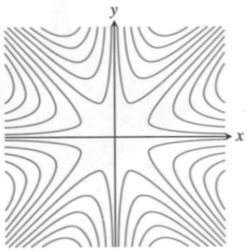
Höhenlinien:

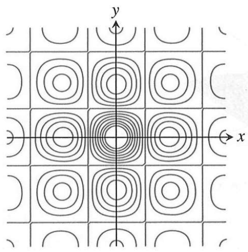

(a)

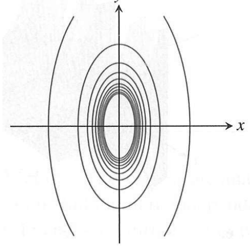

(b)

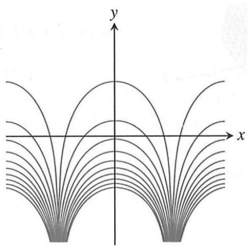

(c)

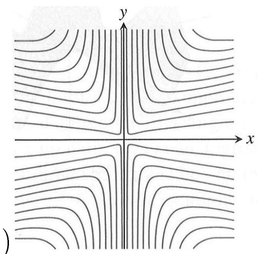

(d)


(e)


(f)


(g)


(h)


(i)

Aufgabe 76

Man finde zu $f(x,y) = \frac{y}{x}$ im Bereich $x > 0$ die

(i) Höhenlinien mit $z = 0, 0.5, 1, 2$ und
(ii) die Schnittkurven parallel zur x-z-Ebene mit $y = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe 77

Man skizziere die Höhenlinien und Schnittkurven parallel zur x-z und y-z-Ebene der Funktion $f(x,y) = y - x$.

Aufgabe 78

Man skizziere Höhenlinien der Funktionen

(i) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$,

(ii) $g(x,y) = \dfrac{1}{9}x^2 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{4}y^2 + y + 2$.

Insbesondere zeichne man jeweils eine Höhenlinie durch den Punkt $(3,0)$.

Aufgabe 79

Für die folgenden Funktionen finde man den Definitionsbereich D, den Wertebereich W (jeweils als Mengen) und beschreibe die Höhenlinien.

(i) $f(x,y) = y - x$

(ii) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$

(iii) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$

(iv) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$

(v) $f(x,y) = \sin^{-1}(y - x)$

(vi) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2 - 1)$

Aufgabe 80

Für die folgenden Funktionen beschreibe man (in Worten) die (typischen) Niveauflächen.

(i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

(ii) $f(x,y,z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$

(iii) $f(x,y,z) = x + z$

(iv) $f(x,y,z) = z$

(v) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$

(vi) $f(x,y,z) = y^2 + z^2$

(vii) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$

Aufgabe 81

Man leite die folgenden Funktionen nach ihren Argumenten ab.

(i) $f(x,y) = -4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5$

(ii) $f(x,y) = x^2y^4 + e^x\cos(y) + 10x - 2y^2 + 3$

(iii) $f(x,y) = xy^2(\sin(x) + \sin(y))$

(iv) $f(x,y) = \log(x + y^2)$

(v) $f(x,y,z) = 2xe^{yz} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(vi) $f(x,y,z) = \sin(x - y)\cos(z + 2y)$

(vii) $p(V,T) = \frac{RT}{V}$, wobei $R \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

Aufgabe 82

Man leite die folgenden Funktionen nach ihren Argumenten ab.

(i) $f(x,y) = \frac{2y}{y + \cos(x)}$

(ii) $f(x,y) = x^4 + 6\sqrt{y} - 10$

(iii) $w(x,y,z) = x^2y - 10y^2z^3 + 43x - 7\tan(4y)$

(iv) $h(s,t) = t^7\log(s^2) + \frac{9}{t^3} - \sqrt[7]{s^4}$

(v) $f(x, y) = \cos(4/x)e^{x^2y-5y^3}$
(vi) $f(x, y) = \cos^2(3x - y^2)$
(vii) $f(x, y) = \int_x^y g(t)dt$

Aufgabe 83

Sei $f(x, y) = 2x + 3y - 4$. Man finde die Steigung der Geraden, welche im Punkt $(2, -1)$ tangential zum Graphen von $f(x, y)$ und

(i) in der Ebene $x = 2$,
(ii) in der Ebene $y = -1$

liegt.

Aufgabe 84

Sei $f(x, y) = x^2 + y^3$. Man finde die Steigung der Geraden, welche im Punkt $(-1, 1)$ tangential zum Graphen von $f(x, y)$ und

(i) in der Ebene $x = -1$,
(ii) in der Ebene $y = 1$

liegt.

Aufgabe 85

Man bestimme die zweiten Ableitungen der Funktion $f(x, y) = 3x^2y + xe^y$ und überprüfe $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Aufgabe 86

Für

$$h(x, y) = xy + \frac{e^y}{y^2 + 1}$$

berechne man $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$.

Aufgabe 87

Die Gleichung

$$yz - \log(z) = x + y$$

definiere z implizit als Funktion von x und y. Man finde $\frac{\partial z}{\partial x}$ durch partielles Ableiten von beiden Seiten nach x.

Aufgabe 88

Der Gesamtwiderstand R von drei parallelgeschalteten Widerständen R_1, R_2 und R_3 ist gegeben durch

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Man finde $\frac{\partial R}{\partial R_2}$ wenn $R_1 = 30$, $R_2 = 45$ und $R_3 = 90$ (SI Einheiten).

Aufgabe 89

Für die folgenden Funktionen soll die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ berechnet werden. Man entscheide welche Reihenfolge der Ableitungen (i.e. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) effizienter zum Ziel führt (ohne die Rechnung durchzuführen).

(i) $f(x,y) = x\sin(y) + e^y$

(ii) $f(x,y) = 1/x$

(iii) $f(x,y) = y + x/y$

(iv) $f(x,y) = y + x^2y + 4y^3 - \log(y^2+1)$

(v) $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin(x) + 7e^x$

(vi) $f(x,y) = x\log(xy)$

Aufgabe 90

Für die folgenden Funktionen verschwindet die partielle Ableitung $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$. Nach welcher Variable (x oder y) soll zuerst abgeleitet werden um dies so effizient wie möglich zu zeigen (man führe die Rechnung nicht durch)?

(i) $f(x,y) = y^2x^e e^x + 2$

(ii) $f(x,y) = y^2 + y(\sin(x) - x^4)$

(iii) $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin(x) + 7e^x$

(iv) $f(x,y) = xe^{y^2/2}$

Aufgabe 91

Die Wellengleichung ist

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

wobei c eine Konstante ist (die Ausbreitungsgeschwindigkeit). Man zeige dass die folgenden Funktionen diese Gleichung erfüllen.

(i) $w = \sin(x + ct)$

(ii) $w = \cos(2x + 2ct)$

(iii) $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$

(iv) $w = \log(2x + 2ct)$

(v) $w = 5\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

Aufgabe 92

Man bestimme eine Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von $f(x,y) = x^2 - 3xy$ im Punkt mit x-Koordinate $x_0 = 1$ und y-Koordinate $y_0 = 2$.

Aufgabe 93

Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von $f(x,y) = xy$ im Punkt $(2, 3, \dots)$.

Aufgabe 94

In welchem Punkt der Fläche $z = 2x^2 + y^2$ ist die Tangentialebene parallel zur Ebene $2x + 2y + 2z - 10 = 0$?

Aufgabe 95

Durch die Gleichung $z = x^2 + y^2$ wird ein Rotationsparaboloid beschrieben. In welchem Punkt dieser Fläche ist die Tangentialebene normal zum Vektor $\overrightarrow{n} = (-2, -4, 1)$?

Aufgabe 96

In welchem Punkt der Fläche $z = 2xy + x^2 - 2y^2$ ist die Tangentialebene parallel zur Ebene $2x + 4y - 3z + 8 = 0$?

Aufgabe 97

Man linearisiere die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^4 + e^{xy}$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Aufgabe 98

Zwei Widerstände $R_1 = 10$, $R_2 = 20$ sind parallel geschaltet (SI-Einheiten). Wie änder sich approximativ der Gesamtwiderstand wenn sich R_1 um $+1$ und R_2 um -2 ändert. Man verwende die lineare Approximation.

Aufgabe 99

Seien

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Man bestimme $F(t) = f(\overrightarrow{r}(t))$.

Aufgabe 100

Für

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \end{pmatrix}, \qquad F(t) = f(\overrightarrow{r}(t)),$$

bestimme man $\frac{dF}{dt}(t)$ durch

(i) Hintereinanderschaltung von $f(x, y)$ mit $\overrightarrow{r}(t)$ und nachfolgendem Ableiten und

(ii) durch die Kettenregel.

Aufgabe 101

Für die folgenden $f(x, y)$, $\overrightarrow{r}(t)$, $F(t) = f(\overrightarrow{r}(t))$ bestimme man $\frac{dF}{dt}(t)$ mit Hilfe der Kettenregel.

(i) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 13, \qquad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(4t) \\ 2\sin(4t) \end{pmatrix},$

(ii) $f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 + \cos(t) \\ 2 + \sin(t) \end{pmatrix},$

(iii) $f(x, y) = x^2y^3 + y\cos(x), \qquad \overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \log(t^2) \\ \sin(4t) \end{pmatrix}.$

Aufgabe 102

Im betrachteten Gebiet sei die folgende Temperaturverteilung gegeben:

$$T(x, y, z) = e^{-4z}(17 + 2x - \sin(y)).$$

Eine Drohne fliegt durch dieses Gebiet auf einer Flugbahn gegeben durch ihre Position in Abhängigkeit der Zeit:

$$\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 4\sqrt{t} \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Temperatur- und die Temperaturänderung in Abhängigkeit der Zeit welche die Drohne auf ihrem Flug erfährt.

Aufgabe 103

Man finde $\overrightarrow{\nabla} f(1,0)$ für $f(x,y) = x^2 \sin(5y)$.

Aufgabe 104

Man finde die Richtungsableitung von $f(x,y) = x^2y^3$ in die Richtung von $\overrightarrow{v} = (1,2)$ im Punkt $(2,1)$.

Aufgabe 105

Man zeige dass die Richtungsableitungen in die Richtungen der x- und y-Achse den partiellen Ableitungen entsprechen.

Aufgabe 106

Man bestimme $\overrightarrow{\nabla} f$ für die folgenden Funktionen.

(i) $f(x,y) = x + y^2$
(ii) $f(x,y) = \frac{4y}{x^2+1}$
(iii) $f(x,y,z) = \sin(x)e^y \log(z)$

Aufgabe 107

Für die folgenden Funktionen berechne man den Gradienten am gegebenen Punkt und skizziere diesen Gradienten zusammen mit der Höhenline welche durch den gegebenen Punkt verläuft.

(i) $f(x,y) = y - x$, $(2,1)$
(ii) $g(x,y) = xy^2$, $(2,-1)$

Aufgabe 108

Für $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ finde man im Punkt $(-1,1)$ die Richtung in welcher die Funktion am stärksten wächst und die Ableitung in diese Richtung.

Aufgabe 109

Man berechne den Gradienten der folgenden Funktionen:

(i) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$
(ii) $g(x,y) = \sqrt{2x + 3y}$
(iii) $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z\log(x)$
(iv) $k(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \log(xyz)$

Aufgabe 110

Für die folgenden Funktionen und Punkte finde man einen Einheitsvektor in die Richtung, in welche die Funktion am stärksten wächst und berechne die Ableitung der Funktion in diese Richtung.

(i) $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\sin(y), \quad (1,0)$,
(ii) $g(x,y,z) = \log(xy) + \log(yz) + \log(xz), \quad (1,1,1)$.

Aufgabe 111

Sei $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y$. Man finde die Richtungen (Einheitsvektoren $\overrightarrow{e}$), in welche

(i) $D_{\overrightarrow{e}}f(1,-1)$ am grössten ist,
(ii) $D_{\overrightarrow{e}}f(1,-1)$ am kleinsten ist,
(iii) $D_{\overrightarrow{e}}f(1,-1) = 0$,
(iv) $D_{\overrightarrow{e}}f(1,-1) = 4$.

Aufgabe 112

Die Ableitung von $f(x,y)$ im Punkt $(5,-9)$ in die Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ist $2\sqrt{2}$ und in die Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ ist -3. Man bestimme die Ableitung von f in die Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

Aufgabe 113

Man finde eine kartesische Gleichung für die Tangente an die Ellipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

im Punkt $(-2,1)$.

Aufgabe 114

Wir betrachten die Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius $\sqrt{3}$ und Zentrum am Ursprung. Man finde eine kartesische Gleichung für die Tangentialebene an die Kugeloberfläche im Punkt $(1,1,1)$.

Aufgabe 115

Die Gleichung $x^2y = 4ze^{x+y} - 35$ beschreibt eine zweidimensionale Fläche im dreidimensionalen Raum. Man finde eine Gleichung der Tangentialebene an diese Fläche im Punkt $(3,-3,2)$.

Aufgabe 116

Wir betrachten $f(x,y) = xy$.

(i) Man skizziere die Höhenlinien von $f(x,y)$.
(ii) Man berechne den Gradienten von $f(x,y)$ in den Punkten $(\pm 1, \pm 1)$ und zeichne die Gradientvektoren in diesen vier Punkten ein. Zudem zeichne man Kurven welche senkrecht zu den Höhenlinien verlaufen.

(iii) Man finde die kritischen Punkte von $f(x, y)$ und klassifiziere diese bezüglich Maximum, Minimum, Sattelpunkt oder nicht definiert.

Aufgabe 117

Sei $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$. Man finde und klassifiziere die kritischen Punkte von $f(x, y)$.

Aufgabe 118

Sei $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$. Man finde und klassifiziere die kritischen Punkte von $f(x, y)$.

Aufgabe 119

Sei $f(x, y) = e^{x^2+y^2-4x}$. Man finde und klassifiziere die kritischen Punkte von $f(x, y)$.

Aufgabe 120

Sei $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$. Man finde das absolute Maximum und Minimum von $f(x, y)$ im Gebiet im ersten Quadranten begrenzt durch $x = 0$, $y = 2$ und $y = 2x$.

Aufgabe 121

Man finde das absolute Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$ im Gebiet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1; |y| \leq 1\}$.

Aufgabe 122

Man finde das Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y) = xy$ auf der Ellipse $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Aufgabe 123

In welchen Punkten hat die Gerade $y = 5 - 3x$ den minimalen Abstand zum Punkt $(-2, 3)$? Man löse die Aufgabe mit Hilfe der Methode der Lagrangemultiplikatoren.

Aufgabe 124

Man finde das Maximum und Minimum der Funktion $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

Aufgabe 125

Man finde den kürzesten Abstand der Fläche $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ zum Ursprung.

Aufgabe 126

Die Temperatur an einem Punkt (x, y) einer Metallplatte ist $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Eine Ameise bewegt sich auf der Platte auf einem Kreis mit Radius gleich 5 um den Ursprung. Welches ist die grösste und kleinste Temperatur welche die Ameise auf ihrem Weg erfährt.

Aufgabe 127

Man bestimme

$$\iint_R f(x,y)dA,$$

mit

$$f(x,y) = 100 - 6x^2y, \qquad R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2; -1 \le y \le 1\}.$$

Aufgabe 128

Man bestimme

$$\iint_R x\cos(2y)dA,$$

mit $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le \pi/4\}$

Aufgabe 129

Man bestimme die folgenden Integrale: (Erinnerung: $[a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b; c \le y \le d\}$).

(i) $\displaystyle\iint_R 6xy^2 dA, \quad R = [2,4] \times [1,2],$

(ii) $\displaystyle\iint_R (2x - 4y^3)dA, \quad R = [-5,4] \times [0,3],$

(iii) $\displaystyle\iint_R (x^2y^2 + \cos(\pi x) + \sin(\pi y))dA, \quad R = [-2,-1] \times [0,1],$

(iv) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{(2x+3y)^2} dA, \quad R = [0,1] \times [1,2]$

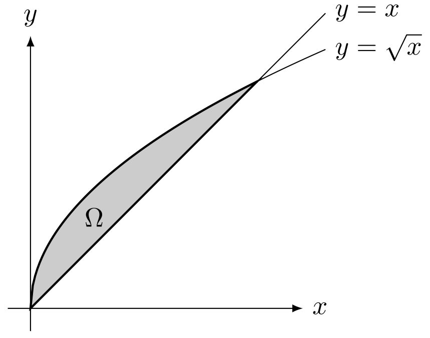
(v) $\displaystyle\iint_R xe^{xy} dA, \quad R = [-1,2] \times [0,1]$

Aufgabe 130

Man bestimme

$$I_{xy} = -\iint_\Omega xy dA,$$

wobei Ω die Teilmenge der x-y-Ebene im ersten Quadranten ist, begrenzt durch den Graphen von $y = x$ und den Graphen von $y = \sqrt{x}$. Man führe die Berechnung mit beiden Integrationsreihenfolgen durch.



Aufgabe 131

Wir betrachten ein Prisma mit Grundseite in der x-y-Ebene, begrenzt durch die x-Achse und die Linien gegeben durch $y = x$, $x = 1$. Die Deckfläche des Prismas ist gegeben durch $z = 3 - x - y$. Man bestimme das Volumen dieses Prismas unter Verwendung beider Integrationsreihenfolgen.

Aufgabe 132

Man bestimme die folgenden Integrale in den entsprechenden Gebieten:

(i) $\displaystyle\iint_\Omega e^{\frac{x}{y}} dA$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2; y \leq x \leq y^3\}$.

(ii) $\displaystyle\iint_\Omega (4xy - y^3) dA$, Ω ist die Teilmenge in der x-y-Ebene, begrenzt durch $y = \sqrt{x}$ und $y = x^3$.

Aufgabe 133

Man berechne die folgenden Integrale indem man die Integrationsreihenfolge ändert:

(i) $\displaystyle\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dy dx$,

(ii) $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4 + 1} dx dy$.

Aufgabe 134

Man berechne das Volumen des Körpers welcher durch die Flächen $z = 6 - 5x^2$, $y = 2x$, $y = 2$, $x = 0$ und der x-y-Ebene begrenzt wird.

Aufgabe 135

Man berechne das Volumen des Körpers, welcher durch die vier Flächen $4x + 2y + z = 10$, $y = 3x$, $z = 0$ und $x = 0$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 136

Man berechne das Volumen des Körpers, welcher durch die Schnittmenge der Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ und $x^2 + z^2 = 4$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 137

Man berechne das Volumen welches durch die Flächen $z = x^2 + y^2$ und $z = 16$ begrenzt wird.

Aufgabe 138

Man berechne das folgende Integral indem man auf Polarkoordinaten transformiert:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2 + y^2) dx dy.$$

Aufgabe 139

Man bestimme die Fläche innerhalb von $r(\varphi) = 2\varphi$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 140

Man bestimme

$$\iint_\Omega e^{x^2+y^2}\,dxdy,$$

wobei

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}.$$

Aufgabe 141

Man schreibe die folgenden Integrale (oder Summe von Integralen) um in ein Integral in kartesischen Koordinaten. Man werte die Integrale nicht aus.

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,dr d\varphi$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2/\cos(\varphi)} r^5 \sin^2(\varphi)\,dr d\varphi$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\arctan(4/3)}\int_0^{3/\cos(\varphi)} r^7\,dr d\varphi + \int_{\arctan(4/3)}^{\pi/2}\int_0^{4/\sin(\varphi)} r^7\,dr d\varphi$

Aufgabe 142

Wir betrachten ein zylindrisches Glas mit Durchmesser d und Höhe H. In den folgenden Teilaufgaben sollen alle gefragten Volumen mit Hilfe eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten berechnet werden. Man beachte den Hinweis am Ende der Aufgabenstellung.

(i) Das Glas sei voll. Man berechne das Volumen der enthaltenen Flüssigkeit.

(ii) Das Glas wird so weit abgekippt (und somit ausgeleert) bis die Oberfläche der Flüssigkeit auf der einen Seite den Boden des Glases berührt. Man berechne das Volumen der Flüssigkeit welche sich noch im Glas befindet.

(iii) Das Glas wird weiter abgekippt, bis die Flüssigkeit den halben Boden des Glases freigibt. Man berechne das Volumen der Flüssigkeit welche sich noch im Glas befindet.

Hinweis: Es ist von Vorteil das Koordinatensystem fest verbunden mit dem Glas und den Ursprung im Zentrum des Bodens zu wählen. Die Flüssigkeitsoberfläche ist dann eine Funktion der beiden Koordinaten in der Ebene und wird am besten zuerst in Abhängigkeit von x-y-Koordinaten formuliert und dann auf Polarkoordinaten umgeschrieben.

Aufgabe 143

Der Querschnitt Ω einer Polygonwelle ist gegeben durch die folgenden Ausdrücke in Polarkoordinaten:

$$0 \le r(\varphi) \le 12 + \cos(3\varphi), \qquad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

(i) Man skizziere den Querschnitt Ω der Polygonwelle in der x-y-Ebene.

(ii) Man bestimme den maximalen und minimalen Radius der Polygonwelle.

(iii) Man berechne den Fächeninhalt $|\Omega|$ des Querschnitts der Polygonwelle. Hinweis:

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)).$$

Aufgabe 144

Wir betrachten das laminare Geschwindigkeitsvektorfeld des quer angeströmten Kreiszylinders in der x-y-Ebene. Dieses ist gegeben durch

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi,$$

wobei das Potential ϕ in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\phi(r, \varphi) = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos(\varphi).$$

Hier ist $U > 0$ eine Konstante (Betrag der Anströmgeschwindigkeit) und $R > 0$ der Radius des Zylinders (auch eine Konstante). Das Potential besitzt nur Gültigkeit für $r \geq R$.

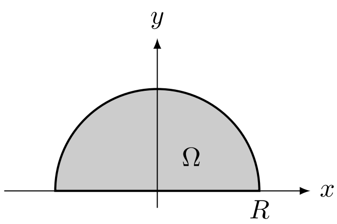
(i) Man schreibe das Potential $\phi(r, \varphi)$ als Funktion der kartesischen Koordinaten x und y.

(ii) Man bestimme die Geschwindigkeit $\vec{v}(x, y)$.

(iii) Man bestimme die Punkte auf dem Zylinder, i.e. bei $x^2 + y^2 = R^2$, in welchen die Geschwindigkeit den grössten resp. kleinsten Betrag besitzt. Wie gross ist der Betrag der Geschwindigkeit in diesen Punkten?
Hinweis: Man betrachte den Betrag der Geschwindigkeit zum Quadrat und finde die Extremalstellen für diese Grösse.

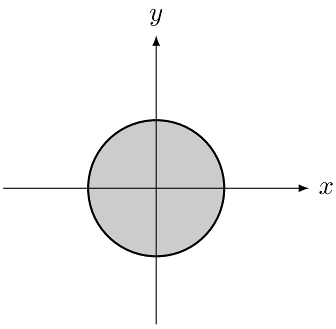
Aufgabe 145

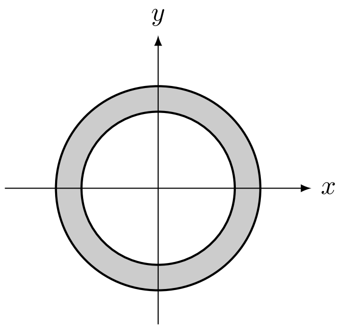
Man bestimme das polare Flächenmoment I_p des folgenden Querschnittes:



Aufgabe 146

Wir betrachten die folgenden beiden Querschnitte:

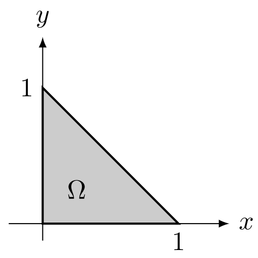




Der Kreis des linken Querschnittes besitzt Radius R. Im rechten Querschnitt beträgt das Verhältnis zwischen der Wandstärke und dem Aussenradius 1/4. Die Querschnittsfläche links und rechts ist gleich. Man bestimme das Verhältnis der polaren Flächenmomente der beiden Querschnitte.

Aufgabe 147

Gegeben ist der folgende Querschnitt Ω:

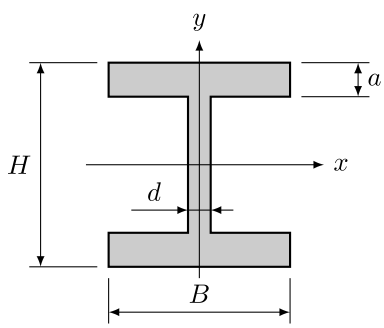


Man bestimme

(i) die axialen Flächenmomente bezüglich den Koordinatenachsen: I_x, I_y, I_{xy},
(ii) die Fläche $|\Omega|$ und die Schwerpunktskoordinaten (x_s, y_s) des Querschnitts Ω,
(iii) die axialen Flächenmomente bezüglich dem Koordinatensystem durch den Ursprung: I_{xs}, I_{ys}, I_{xys} (die Richtung der Koordinatenachsen soll die selbe sein wie die der oben gegebenen Koordinatenachsen, i.e. keine Drehung).

Aufgabe 148

Man bestimme I_x und I_y für den folgenden Querschnitt:

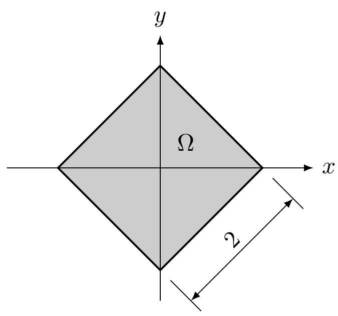


Aufgabe 149

Man berechne

$$I_x = \iint_\Omega y^2 dA$$

für den folgenden quadratischen Querschnitt Ω:

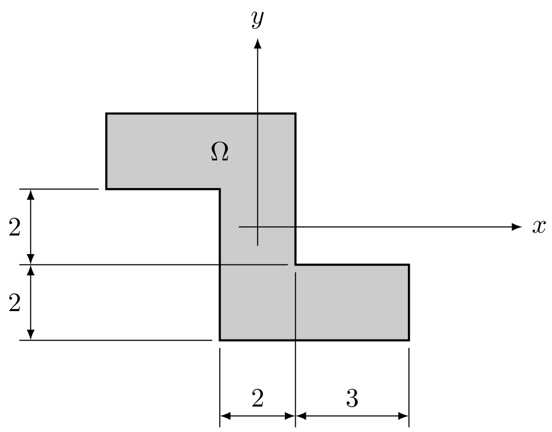


Aufgabe 150

Man bestimme das Flächenmoment

$$I_x = \iint_\Omega y^2 dA,$$

für den untenstehenden Querschnitt Ω:



Hinweise:

(i) Der Querschnitt Ω ist rotationssymmetrisch (Rotation um den Ursprung) mit einem Rotationswinkel von π.

(ii) Satz von Steiner: Bezeichnet I_x das Flächenmoment eines Querschnitts Ω bezüglich dem x-y-Koordinatensystem, so ist

$$I_{xs} = I_x - y_s^2|\Omega|,$$

das Flächenmoment bezüglich einem Koordinatensystem, welches parallel zum x-y-Koordinatensystem und durch den Schwerpunkt des betrachteten Querschnitts verläuft. Die Schwerpunktskoordinaten werden mit (x_s, y_s) bezeichnet und $|\Omega|$ bezeichnet die Querschnittsfläche.

(iii) Für $\Omega = [-b/2, b/2] \times [-h/2, h/2]$ gilt $I_x = bh^3/12$.

Aufgabe 151

Für die folgenden Funktionen finde man das Taylorpolynom dritter Ordnung an der Stelle x_0.

(i) $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 0$

(ii) $f(x) = \log(x)$, $x_0 = 1$

(iii) $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 0$

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 2$

(v) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x_0 = 0$

(vi) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 0$

(vii) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x + 4$, $x_0 = 0$

(viii) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x + 4$, $x_0 = -2$

(ix) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, $x_0 = 0$

(x) $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Aufgabe 152

Man bestimme das Taylorpolynom 6. Ordnung im Punkt $x_0 = 0$ für die Funktionen

(i) $f(x) = \sin(x)$,

(ii) $g(x) = \cos(x)$.

Aufgabe 153

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Man bestimme das Taylorpolynom 4. Ordnung von $f(x)$

(i) im Punkt $x_0 = 0$,
(ii) im Punkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 154

Man bestimme das Taylorpolynom 3. Ordnung für die Funktion

$$f(x) = (1+x)^{3/2}$$

im Punkt $x_0 = 3$.

Aufgabe 155

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ und den Punkt $x_0 = 0$.

(i) Man bestimme das Taylorpolynom 2. Ordnung $p_2(x)$ an der Stelle x_0.
(ii) Man bestimme das Restglied $R_2(x)$.
(iii) Man bestimme eine obere Schranke für $|R_2(x)|$ im Intervall $[0, 1/2]$.

Aufgabe 156

Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ wird durch das Taylorpolynom 3. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ approximiert. Man finde eine obere Schranke für den Fehler dieser Approximation im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$.

Aufgabe 157

Man zeige durch Reihenentwicklung bis zur vierten Ordnung, dass gilt

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Aufgabe 158

Man zeige

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

an Hand der Reihenentwicklung.

Aufgabe 159

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung einer Funktion $f(x)$ bei $x = x_0$ wird *quadratische Approximation* genannt. Für die folgenden Funktionen soll die quadratische Approximation bei $x_0 = 0$ berechnet werden.

(i) $f(x) = \log(\cos(x))$ (ii) $f(x) = e^{\sin(x)}$

Aufgabe 160

Man benutze die Taylorreihe von e^x bei $x = a$ um zu zeigen dass

$$e^x = e^a \left(1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots\right).$$

Aufgabe 161

Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y) = e^x \sqrt{y}.$$

Man finde eine Abschätzung von $f(0.01, 24.8)$. Hinweis: Man linearisiere die Funktion $f(x,y)$ an einem geeigneten Punkt (x_0, y_0).

Aufgabe 162

Man finde approximativ einen numerischen Wert für den Ausdruck

$$\sin(0.01)\cos(0.99\pi).$$

Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

Es gilt jeweils $C \in \mathbb{R}$.

(i) $F(x) = 4x + C$
(ii) $F(x) = 2x^2 + C$
(iii) $F(x) = x^2 + 7x + C$
(iv) $F(x) = \frac{1}{2}\log(x) + C$
(v) $F(x) = x^8 + C$
(vi) $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x} + C$
(vii) $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
(viii) $F(x) = -\sin(x) - \cos(x) + C$
(ix) $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$

Lösung zu Aufgabe 2

(i) $F(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + C$
(ii) $X(f) = \frac{1}{7}f^7 + C$
(iii) $H(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$
(iv) $\Sigma(v) = 3\sin(v/3) + C$

Lösung zu Aufgabe 3

(i) $F(x) = \log(x+1) + C$
(ii) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + C$
(iii) $F(x) = \frac{1}{2}\arctan(2x) + C$
(iv) $F(x) = -e^{1-x} + C$

Lösung zu Aufgabe 4

Wir benutzen die Definition der Betragsfunktion, i.e.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Wir erhalten somit für die Stammfunktion

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{cases} -x^2/2 & \text{für } x < 0, \\ x^2/2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}x|x|. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 5

$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$.

Lösung zu Aufgabe 6

$s(t) = -\frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{6}t^3 + t^2 + 5t + 3$.

Lösung zu Aufgabe 7

$s(t) = 4e^{\frac{1}{2}t} + t - 4$.

Lösung zu Aufgabe 8

(i) Wir bezeichnen den Ruck mit $r(t)$. $r(0) = 10$, $r(3) = 12 - 2e^{-3}$.

(ii) $s(t) = 2e^{-t\mathrm{s}^{-1}}\mathrm{m} + 2t^3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} + 3t^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 1\mathrm{m}$,
$v(t) = -2e^{-t\mathrm{s}^{-1}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 6t^2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} + 6t\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
$a(t) = 2e^{-t\mathrm{s}^{-1}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 12t\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3} + 6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Lösung zu Aufgabe 9

Wir haben $s(t) = -t^2 + t + 16$. Dies ist die Position in Abhängigkeit der Zeit. Aufgetragen als Funktion ist es eine nach unten geöffnete Parabel. Der Körper bewegt sich somit zuerst nach oben bis zum Scheitelpunkt der Bewegung und danach wieder nach unten. Der Scheitelpunkt befindet sich bei $s(1/2) = 16.25$ und wir haben $s(3) = 10$. Der zurückgelegte Weg ist somit gleich 6.5.

Lösung zu Aufgabe 10

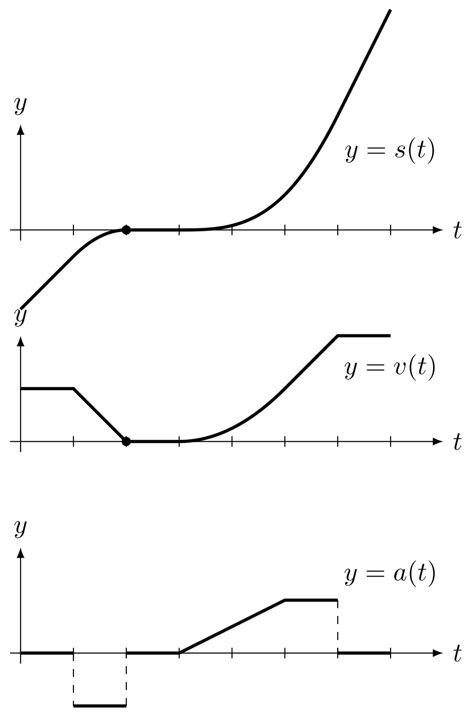
$s(t) = \frac{1}{6}r_0t^3 + \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + s_0$.

Lösung zu Aufgabe 11

$s(t) = \frac{1}{12}t^4 + t + 11/12$.

Lösung zu Aufgabe 12

Man beachte dass der Anstieg im $v(t)$-Verlauf quadratisch und im $s(t)$-Verlauf zuerst kubisch (für zwei Zeiteinheiten) und dann quadratisch ist.



Lösung zu Aufgabe 13

Wir unterteilen das Intervall $[0, 1]$ in n gleichlange Teilintervalle. Die rechten Randpunkte dieser Teilintervalle sind dann gegeben durch $\frac{i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Für die Obersumme sind diese rechten Randpunkte auch die ξ-Werte, i.e. $\xi_i = \frac{i}{n}$. Somit folgt $f(\xi_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$.

Somit haben wir

$$\begin{aligned}
\overline{S}_n &= \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

wobei wir von der dritten zur vierten Zeile den Hinweise verwendet haben. Somit haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

I.e.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Lösung zu Aufgabe 14

$$\text{(i)} \quad S_4 = -1/4, \qquad \text{(ii)} \quad S_4 = 7/4, \qquad \text{(iii)} \quad S_4 = 5/8.$$

Lösung zu Aufgabe 15

(i) 4, (ii) $\frac{9}{4}\pi$.

Lösung zu Aufgabe 16

(i) 0, (ii) 9/4, (iii) 1

Lösung zu Aufgabe 17

(i) Wir haben $a = 0$, $b = 2$, $(b-a)/n = 2/n$. Die Intervallgrenzpunkte auf der x-Achse bei n Teilintervallen sind gegeben durch

$$x_i = i\frac{2}{n}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Die ξ's sind somit gegeben durch

$$\xi_i = x_1 = i\frac{2}{n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Riemannsche Obersumme n-ter Ordnung ist somit gegeben durch

$$\overline{S}_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^3 = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{2}{n}\right)^3 = \frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3.$$

Wir verwenden die Formel aus dem Hinweis und erhalten

$$\overline{S}_n = \frac{16}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{4(n+1)^2}{n^2} = 4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.$$

Wir erhalten das Integral durch den Grenzübergang

$$\int_0^2 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} 4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 4.$$

(ii)

$$\int_0^2 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 4.$$

Lösung zu Aufgabe 18

(i) $\frac{1}{6}(x-1)^6 + C$
(ii) $\frac{1}{10}(2x+1)^5 + C$
(iii) $-\frac{1}{20}(2-5x)^4 + C$
(iv) $\frac{1}{3}(1-x)^{-3} + C$

Lösung zu Aufgabe 19

(i) $\cos(1-x) + C$
(ii) $x + e^{-x} + C$
(iii) $x + \log(x) + C$
(iv) $\frac{1}{2}\log(2x+1) + C$
(v) $\sum_{k=1}^{10} \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$
(vi) $\frac{1}{6}(4x+1)^{3/2} + C$

Lösung zu Aufgabe 20

(i) $\frac{\sin(at)}{a} + C$
(ii) $-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$
(iii) $\frac{1}{2}\log(t^2+1) + C$
(iv) $\frac{au^2}{2} + \frac{u^3}{3} + C$
(v) $\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + t + C$
(vi) $\frac{1}{4}e^{4\sin(x)} + C$
(vii) $\frac{3}{2}\arctan(y/2) + C$
(viii) $a\sqrt{1+t^2} + C$

Lösung zu Aufgabe 21

Folgende Ausdrücke jeweils mit $C \in \mathbb{R}$.

(i) $F(x+1) + C$
(ii) $\frac{1}{2}F(2x) + C$
(iii) $-\frac{1}{4}F(1-4x) + C$
(iv) $2F(x/2) + C$
(v) $\frac{1}{2}F(x^2) + C$
(vi) $e^{f(x)} + C$

Lösung zu Aufgabe 22

Jeweils mit $C \in \mathbb{R}$.

(i) $-\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 2x + C$
(ii) $\log(x) + \frac{1}{x} + C$
(iii) $-\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + C$
(iv) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - x^2 + x\right) + C$

Lösung zu Aufgabe 23

Beispielsweise:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ -t^2 + 2t & 1 \leq t < 1.5 \\ -t + \frac{9}{4} & 1.5 \leq t \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 24

$\overline{S}_6 = \frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3})$, $\underline{S}_6 = \frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3})$.

Lösung zu Aufgabe 25

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 0dx + \int_{0}^{0}(1/2)dx + \int_{0}^{1} 1dx = 1.$

Lösung zu Aufgabe 26

$\int_{0}^{-1} xdx = -\int_{-1}^{0} xdx = -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$

Lösung zu Aufgabe 27

(i) 0
(ii) $\sqrt{3}/2$
(iii) 0
(iv) $(e-1)/e$

Lösung zu Aufgabe 28

(i) $\sqrt{t^2+1}$
(ii) $-\sin^2(t)$
(iii) $\frac{2}{1+t^2}$
(iv) 0

Lösung zu Aufgabe 29

Die Schnittpunkte der Graphen sind bei $x = -3, 1$. Wegen $f(0) = 0 < 3 = g(0)$ folgt dass im Intervall $[-3, 1]$ $f(x) \leq g(x)$ gilt. Die Fläche ist

$$A = \int_{-3}^{1}(g(x) - f(x))dx = \int_{-3}^{1}(3 - 2x - x^2)dx = \ldots = \frac{32}{3}.$$

Lösung zu Aufgabe 30

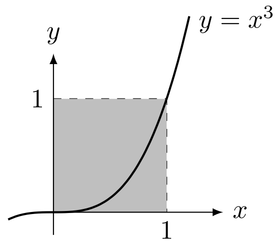
10/3.

Lösung zu Aufgabe 31

64/3

Lösung zu Aufgabe 32

(i) Das Gebiet D ist ein Quadrat. Der Graph $y = x^3$ verläuft durch den Punkt $(1,1)$:



(ii) Wir berechnen den Flächeninhalt unterhalb des Graphen, i.e. zwischen dem Graphen und der x-Achse:

$$A = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

Somit ist der Flächeninhalt oberhalb des Graphen $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

(iii) Wegen (ii) erwarten wir dass $a > 1$. Somit schneidet der Graph $y = ax^3$ die obere Seite des Quadrats (siehe untenstehende Grafik). Die x-Koordinate des Schnittpunkts des Graphen mit der Quadratseite ist gegeben durch $1 = ax^3$. Daraus folgt $x = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$. Die Fläche zwischen dem Graphen $y = ax^3$ und der oberen Quadratseite ist

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}} (1 - ax^3)dx = \left(x - a\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{a}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{a}}.$$

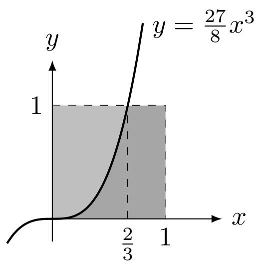
Diese Fläche muss nun $1/2$ betragen, i.e. wir haben die Gleichung

$$\frac{3}{4\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{3}, \qquad \text{i.e.} \qquad a = \frac{27}{8}.$$

Die Situation ist in der folgenden Grafik eingezeichnet:



Lösung zu Aufgabe 33

$\frac{7}{2} + e^{-4}/2$.

Lösung zu Aufgabe 34

$64/3$.

Lösung zu Aufgabe 35

142/3

Lösung zu Aufgabe 36

$2\sqrt{2} - 2$

Lösung zu Aufgabe 37

$A = \int_{-2}^{4} \left((y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3\right)\right) dy = 18$

Lösung zu Aufgabe 38

$A = \int_{-1}^{3} \left(-y^2 + 10 - (y-2)^2\right) dy = 64/3.$

Lösung zu Aufgabe 39

$78\pi/5$

Lösung zu Aufgabe 40

$512\pi/21$

Lösung zu Aufgabe 41

Die Schnittpunkte der Graphen sind bei $x = 0, 3$, dies sind somit auch die Integrationsgrenzen. Die Querschnitte parallel zur y-z-Achse sind Kreisringe. Der innere Radius ist $4 - x$ und der äussere Radius ist $4 - (x^2 - 2x) = -x^2 + 2x + 4$. Die Querschnittsfläche ist somit $A(x) = \pi\left((-x^2 + 2x + 4)^2 - (4 - x)^2\right) = \pi(x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x)$ und das Volumen ist

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)dx \\ &= \int_0^3 \pi(x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 24x)dx \\ &= \ldots = 153\pi/5 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 42

$96\pi/5$

Lösung zu Aufgabe 43

$2\pi^2 R r^2$

Lösung zu Aufgabe 44

Wir setzen den Koordinatenursprung in das Zentrum der Linse. Wir betrachten den ersten Quadranten. Der Kreis ist gegeben durch $(x-6)^2 + y^2 = 25$. Somit liegt der Querschnitt zwischen $y = 0$ und $y = 3$ für $0 \leq x \leq 1$ und zwischen $y = \sqrt{25 - (x-6)^2}$ und $y = 3$ für $1 \leq x \leq 2$. Wir berechnen das Volumen als zweimal das Volumen der rechten Hälfte:

$$V = 2\left(\underbrace{\pi\int_0^1 3^2dx}_{\text{Zylinder}} + \underbrace{\pi\int_1^2 \left(3^2-(25-(x-6)^2)\right)dx}_{\text{Kugelnegativ}}\right) = 2\pi\left(9+\int_1^2\left(x^2-12x+20\right)dx\right) = \frac{80\pi}{3}.$$

LÖSUNG ZU AUFGABE 45

$\frac{a}{2}(e-1/e)$

LÖSUNG ZU AUFGABE 46

Wir haben

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}.$$

Somit folgt

$$1+\left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2 = 1+\frac{x^4}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4} = \frac{x^4}{16}+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2.$$

Somit ist die Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2}dx = \int_1^4\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4 = \ldots = 6.$$

LÖSUNG ZU AUFGABE 47

(i) $\int_1^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3}-\frac{1}{3} = \frac{26}{3}$.

(ii) Wir haben $\frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$. Die Funktion ist steigend, wir wählen somit die ξ's am rechten Rand der Teilintervalle: $\xi_i = 1+\frac{2}{n}i$. Es folgt $f(\xi_i) = \xi_i^2 = \left(1+\frac{2}{n}i\right)^2 = 1+\frac{4i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}$. Für die Obersumme gilt

$$\begin{aligned}\overline{S}_n &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{4i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}\right)\\ &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\\ &= 2+\frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{8}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &= 2+4+\frac{4}{n}+\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n = 2+4+\frac{8}{3} = \frac{26}{3}.$$

(iii) Für die Untersumme wählen wir die ξ's am linken Rand: $\xi_i = 1+\frac{2}{n}(i-1)$. Es gilt somit

$$f(\xi_i) = \left(1+\frac{2}{n}(i-1)\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \frac{4}{n}(i-1) + \frac{4}{n^2}(i^2 - 2i + 1) \\
&= 1 - \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} + i\left(\frac{4}{n} - \frac{8}{n^2}\right) + \frac{4}{n^2}i^2.
\end{aligned}
$$

Für die Untersumme gilt

$$
\begin{aligned}
\underline{S}_n &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} + i\left(\frac{4}{n} - \frac{8}{n^2}\right) + \frac{4}{n^2}i^2\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(1 - \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{2}{n}\left(\frac{4}{n} - \frac{8}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= 2 - \frac{8}{n} + \frac{8}{n^2} + \frac{2}{n}\left(\frac{4}{n} - \frac{8}{n^2}\right)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4}{3n^3}n(n+1)(2n+1) \\
&= 2 - \frac{8}{n} + \frac{8}{n^2} + \left(4 - \frac{8}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Somit folgt

$$
\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = 2 + 4 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3}.
$$

Lösung zu Aufgabe 48

(i) $\frac{1}{4(1-4x^3)^2} + C$ (ii) $\frac{\sin^3(x)}{3} + C$ (iii) $\log(2x^3 - 5x + 6) + C$

Lösung zu Aufgabe 49

Substitution jeweils in eckigen Klammern.

(i) $\frac{4}{5}(6x^3+5)^{5/4} + C$ $[u = 6x^3 + 5]$
(ii) $\sin(w - \log(w)) + C$ $[u = w - \log(w)]$
(iii) $3e^{4y^2-y} + C$ $[u = 4y^2 - y]$
(iv) $-\frac{1}{150}(3-10x^3)^5 + C$ $[u = 3 - 10x^2]$
(v) $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$ $[u = 1 - 4x^2]$
(vi) $-\frac{1}{5}(2 - \cos(1-x))^5 + C$ $[u = 2 - \cos(1-x)]$
(vii) $\frac{1}{33}\sin^{11}(3z) + C$ $[u = \sin(3z)]$

Lösung zu Aufgabe 50

$-\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + C$

Lösung zu Aufgabe 51

(i) $\frac{1}{2}(\log(x))^2 + C$, (ii) $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-5)$

Lösung zu Aufgabe 52

Substitution jeweils in eckigen Klammern.

(i) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ $[u = x^2]$
(ii) $-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(s) + C$ $[u = \cos(x)]$
(iii) $\arctan(\log(x)) + C$ $[u = \log(x)]$
(iv) $\frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$ $[u = x^2 + 1]$
(v) $\frac{1}{6}(u^4+1)^{3/2} + C$ $[w = u^4 + 1]$
(vi) $\log(1 + e^x) + C$ $[u = 1 + e^x]$

Lösung zu Aufgabe 53

Substitution jeweils in eckigen Klammern.

(i) $\frac{3}{5}\log(5y+4)+C$ [$u=5y+4$]

(ii) $\frac{3}{10}\log(5y^2+4)+C$ [$u=5y^2+4$]

(iii) $-\frac{3}{10(5y^2+4)}+C$ [$u=5y^2+4$]

(iv) $\frac{3}{2\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}y}{2}\right)+C$ [$u=\sqrt{5}y/2$]

Lösung zu Aufgabe 54

(i) $-x\cos(x)+\sin(x)+C$

(ii) $\frac{x^3}{3}\left(\log(x)-\frac{1}{3}\right)+C$

(iii) $\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}x-\frac{4}{15}(1+x)^{5/2}+C$

(iv) $2x\sin(x)-(x^2-2)\cos(x)+C$

(v) $\frac{1}{2}(\log(x))^2+C$

(vi) $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x-5)+C$

Lösung zu Aufgabe 55

(i) Ist echt gebrochen. $x^2-1=0$. Daraus folgt $x_1=1$, $x_2=-1$.
Ansatz ist $\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$. Multipliziert mit dem Nenner ergibt $x=A(x-1)+B(x+1)$.
Aus $x=1$ folgt $1=2B$, i.e. $B=\frac{1}{2}$. Aus $x=-1$ folgt $-1=-2A$, i.e. $A=\frac{1}{2}$.
$\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}$.

(ii) Der Ansatz lautet

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B}{x-2}.$$

Multiplizieren mit dem Nenner ergibt die Gleichung

$$x^2+x+1=A_1(x-1)^2(x-2)+A_2(x-1)(x-2)+A_3(x-2)+B(x-1)^3.$$

Einsetzen von x-Werten (oder Koeffizientenvergleich) ergibt $A_1=-7$, $A_2=-6$, $A_3=-3$, $B=7$ und somit

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)}=-\frac{7}{x-1}-\frac{6}{(x-1)^2}-\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{7}{x-2}.$$

Lösung zu Aufgabe 56

(i) $\frac{1}{2}x^2+x+3\log(x-1)+C$.

(ii) $-\frac{3}{x-2}-2\log(x-2)+2\log(x-1)+C$.

Lösung zu Aufgabe 57

(i) $\frac{1}{2}\log(x-1)-\frac{1}{2}\log(x+1)+C$

(ii) $-3\log(x)+\log(x+1)+2\log(x-1)+C$

(iii) $3\log(x-2)-3\log(x-1)+\frac{2}{x-1}+C$

(iv) $\frac{1}{x}-3\log(x)+3\log(x-1)+C$

(v) $8\log(x+4)-6\log(x+3)+C$

(vi) $-\frac{1}{2}\log(x)+\frac{2}{9}\log(x+1)+\frac{5}{18}\log(x-2)-\frac{2}{3(x-2)}+C$

Lösung zu Aufgabe 58

$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \ldots = \pi.$

Lösung zu Aufgabe 59

(i) 2, (ii) π.

Lösung zu Aufgabe 60

(i) 6
(ii) $-1/4$
(iii) divergent
(iv) $1/2$
(v) 1
(vi) divergent
(vii) $1/4$

Lösung zu Aufgabe 61

(i) $f(x)$ ist eine gerade Funktion, i.e. $f(-x) = f(x)$, somit haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
&= -\int_0^{-a} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
&= \int_0^a f(-u)du + \int_0^a f(x)dx \\
&= \int_0^a f(u)du + \int_0^a f(x)dx \\
&= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.
\end{aligned}$$

(ii) $f(x)$ ist eine ungerade Funktion, i.e. $f(-x) = -f(x)$, somit haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
&= -\int_0^{-a} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
&= \int_0^a f(-u)du + \int_0^a f(x)dx \\
&= -\int_0^a f(u)du + \int_0^a f(x)dx \\
&= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 62

(i) $1 - 5e^{-4}$
(ii) 2
(iii) $2\log(2) - \frac{3}{4}$
(iv) $3\log(27) - 6$

Lösung zu Aufgabe 63

(i) $\frac{1}{2}(e-1)$
(ii) 1
(iii) 0
(iv) $\frac{1}{3}\log(2)$

Lösung zu Aufgabe 64

(i) Einsetzen von $t=0$ in $v(t)$ ergibt $v(0)=10$. Ableiten ergibt

$$a(t) = -\frac{10}{(t^2+2t+1)^2}(2t+2)$$

Somit folgt $a(0)=-20$.

(ii) Die Höhe in Abhängigkeit der Zeit ist gegeben durch

$$h(t) = \int_0^t v(s)ds = \int_0^t \frac{10}{s^2+2s+1}ds = \int_0^t \frac{10}{(s+1)^2}ds = -\frac{10}{s+1}\Big|_0^t = -\frac{10}{t+1}+10,$$

wobei wir die Anfangsbedingung $s(0)=0$ verwendet haben. Somit ist die maximal erreichbare Höhe

$$H = \lim_{t\to\infty} h(t) = 10.$$

(Diese Höhe wird allerdings in endlicher Zeit nicht erreicht).

(iii) Wir suchen t^*, so dass

$$\frac{H}{2} = h(t),$$

i.e. so dass

$$5 = -\frac{10}{t+1}+10.$$

Es folgt $t=1$. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t=1$ ist $v(1)=2.5$.

Lösung zu Aufgabe 65

(i) Die wirkende Kraft ist konstant. Sei m die Masse des Korbes mit Inhalt und sei g die Gravitationskonstante. Wir haben

$$W = \int_a^b F(z)dz = \int_0^{20} mgdz = \int_0^{20} 50\cdot 10dz = 10000.$$

(ii) Wir bezeichnen die Länge des hängenden Kettenstücks mit $l(z)$ und die Masse pro Meter Länge der Kette mit ρ. Wir haben $l(z)=20-z$ und somit folgt

$$\begin{aligned} W = \int_0^{20}(mg+l(z)\rho g)dz &= \int_0^{20}(50\cdot 10+(20-z)1\cdot 10)dz \\ &= \left(500z+200z-5z^2\right)\Big|_0^{20} = \ldots = 12000. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 66

(i) Wir haben $v(t)=5e^{-2t}+C_1$. Mit $v(0)=10$ folgt $C_1=5$, i.e. der Geschwindigkeitsverlauf ist

$$v(t) = 5e^{-2t}+5.$$

(ii) Wir haben $s(t) = -\frac{5}{2}e^{-2t} + 5t + C_2$. Mit $s(0) = 0$ folgt $C_2 = \frac{5}{2}$, i.e. der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit der Zeit ist
$$s(t) = -\frac{5}{2}e^{-2t} + 5t + \frac{5}{2}.$$

Lösung zu Aufgabe 67

Alle Resultate folgen mit dem Fundamentalsatz.

(i)
$$\text{(a)} \quad \arccos(t), \qquad \text{(b)} \quad 4\sin(4t).$$

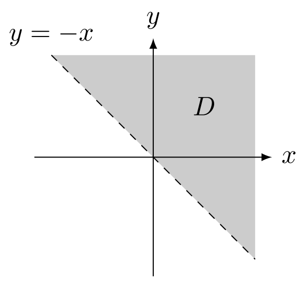
(ii) Die Fläche des Halbkreises unterhalb von $y = f'(x)$ ist 8π. Es folgt
$$8\pi = \int_{-4}^{4} f'(x)dx = f(4) - f(-4),$$
wobei die erste Gleichung aus dem Flächeninhalt unter dem Graphen $y = f'(x)$ folgt und die zweite Gleichung aus dem Fundamentalsatz. Mit $f(4) = 7$ folgt
$$f(-4) = 7 - 8\pi.$$

Lösung zu Aufgabe 68

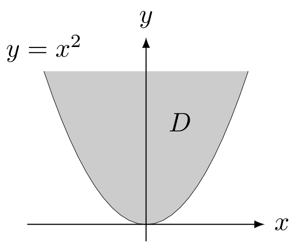
(i) 0, 0, 58, 33
(ii) $\sqrt{3}/2$, $-1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$, -1

Lösung zu Aufgabe 69

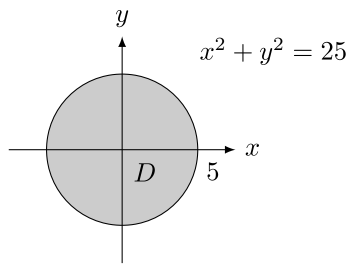
(i) $D = \{(x,y) : y > -x\}$,
$W = \mathbb{R}$



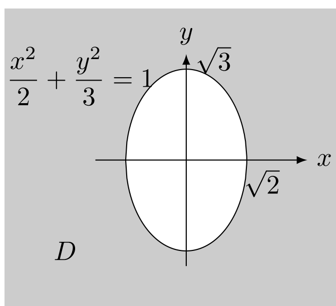
(ii) $D = \{(x,y) : y \geq x^2\}$,
$W = [0,\infty)$



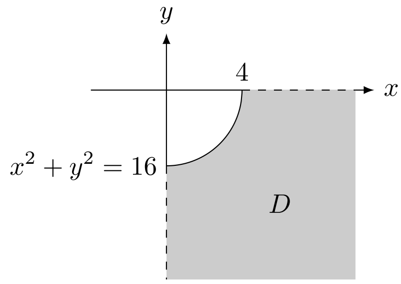
(iii) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$,
$W = [0,5]$



(iv) $D = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \geq 1\right\}$,
$W = [0,\infty)$



(v) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 16, x > 0, y < 0\}$,
$W = \mathbb{R}$



Lösung zu Aufgabe 70

Die Gleichung aus dem Hinweis bekommt man durch Pythagoras. Quadrieren dieser Gleichung ergibt

$$2(x^2 + y^2 + c^2) + 2\sqrt{((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2)} = 4a^2.$$

Umstellen, so dass die Wurzel alleine auf der rechten Seite der Gleichung steht und quadrieren ergibt

$$16a^4 - 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 4(x^2 + y^2 + c^2)^2 = 4(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)(x^2 + 2cx + c^2 + y^2).$$

Kürzen ergibt

$$16a^4 - 16a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 16x^2c^2 = 0.$$

Einsetzen von $c^2 = a^2 - b^2$ und kürzen ergibt

$$b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2.$$

Division durch a^2b^2 ergibt die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 71

(i) Mit $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = b\sin(t)$ finden wir

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = 1,$$

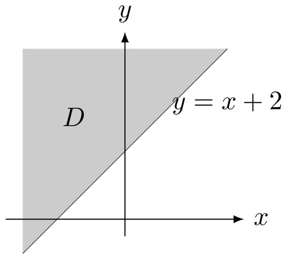
dies ist die Gleichung einer Ellipse am Ursprung mit Halbachsen a und b. Die Halbachsen sind parallel zu den Koordinatenachsen.

(ii)

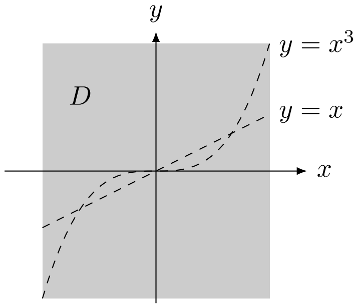
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 5 + 3\cos(t) \\ -8 + 2\sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Lösung zu Aufgabe 72

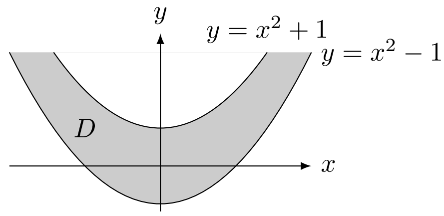
(i) $D = \{(x,y) : y \geq x+2\}$



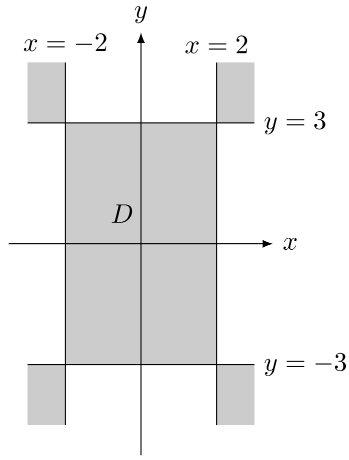
(ii) $D = \{(x,y) : y \neq x; y \neq x^3\}$



(iii) $D = \{(x,y) : x^2 - 1 \leq y \leq x^2 + 1\}$

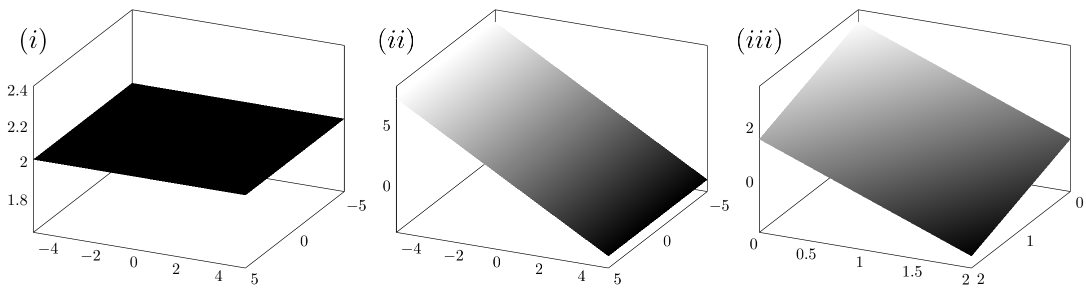


(iv) $D = \{(x,y) : (x^2-4)(y^2-9) \geq 0\}$



Lösung zu Aufgabe 73

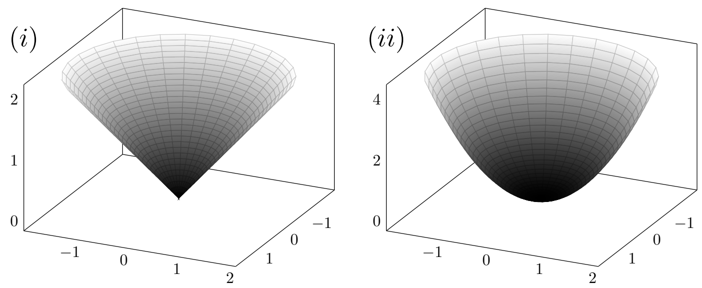
(i) Gleichung: $z = 2$. Dies ist eine horizontale Ebene (Normalenvektor $\overrightarrow{n} = (0,0,1)$) durch den Punkt $(0,0,2)$ (dies ist der Schnittpunkt der Ebene mit der z-Achse).
(ii) Gleichung: $y+z = 2$. Dies ist eine Ebene mit Normalenvektor $\overrightarrow{n} = (0,1,1)$ durch den Punkt $(0,0,2)$ (dies ist der Schnittpunkt der Ebene mit der z-Achse).
(iii) Gleichung: $3x + 6y + 4z = 12$. Dies ist eine Ebene mit Normalenvektor $\overrightarrow{n} = (3,6,4)$ durch den Punkt $(0,0,3)$ (dies ist der Schnittpunkt der Ebene mit der z-Achse).



Lösung zu Aufgabe 74

(i) Mit $y = 0$ erhält man $z = \sqrt{x^2}$. Für $x > 0$ ist dies $z = x$. Rotiert um die z-Achse ist dies ein halber *Kegel* mit Kegelspitz im Ursprung, Kegelachse ist die z-Achse, der Kegel ist nach oben (richtung positiver z-Achse) geöffnet.

(ii) Mit $y = 0$ erhält man die Parabel $z = x^2$. Rotiert um die z-Achse ist dies ein *Rotationsparaboloid*. Sind (wie in den folgenden Grafiken) keine Achsen eingezeichnet, wird davon ausgegangen dass die x-Achse nach vorne links, die y-Achse nach vorne rechts und die z-Achse nach oben zeigt.



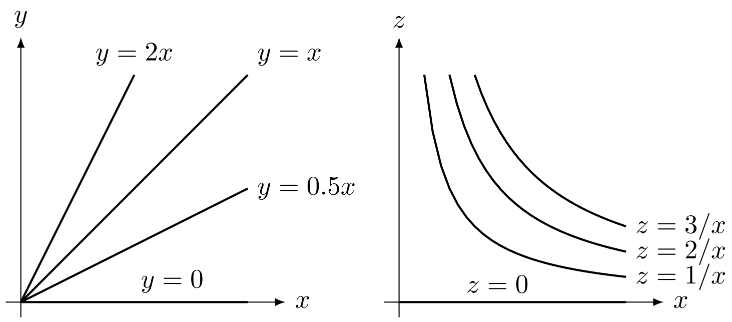
Lösung zu Aufgabe 75

(i)-(f), (ii)-(c), (iii)-(h), (iv)-(d), (v)-(a), (vi)-(g), (vii)-(b), (viii)-(i), (ix)-(e).

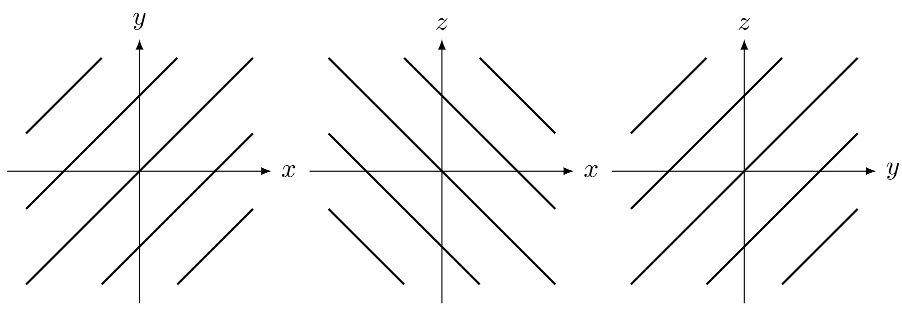
Lösung zu Aufgabe 76

(i) $z = 0$ ergibt $y = 0$, $z = 0.5$ ergibt $y = 0.5x$, $z = 1$ ergibt $y = x$ und $z = 2$ ergibt $y = 2x$. Diese vier Geraden sind somit die gesuchten Höhenlinien.

(ii) $y = 0$ ergibt $z = 0$, $y = 1$ ergibt $z = 1/x$, $y = 2$ ergibt $z = 2/x$ und $y = 3$ ergibt $z = 3/x$. Diese vier Kurven sind die gesuchten Schnittkurven.



Lösung zu Aufgabe 77



Lösung zu Aufgabe 78

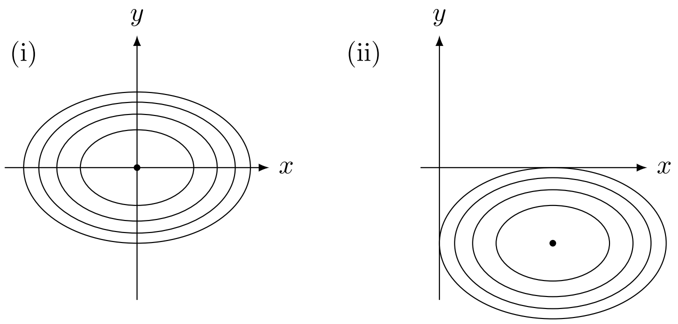
(i) Die Höhenlinien von $f(x,y)$ sind für $z>0$ Ellipsen mit grosser Halbachse $3\sqrt{z}$ (entlang der x-Achse) und kleiner Halbachse $2\sqrt{z}$ (entlang der y-Achse). Die Höhenlinie zu $z=0$ ist der Punkt $(0,0)$.

(ii) Quadratisches Ergänzen liefert

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y^2 + y + 2 \\ &= \frac{1}{9}(x^2-6x) + \frac{1}{4}(y^2+4y) + 2 \\ &= \frac{1}{9}((x-3)^2-9) + \frac{1}{4}((y+2)^2-4) + 2 \\ &= \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Somit sind die Höhenlinien von $g(x,y)$ dieselben Ellipsen wie bei (i) (und im Fall $z=0$ der Punkt $(3,-2)$), jedoch in x-Richtung um 3 und in y-Richtung um -2 verschoben.

In der folgenden Figur sind Höhenlinien für $z \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ gezeichnet. Die Höhenlinie durch den Punkt $(3,0)$ ist jeweils die grösste Ellipse.



Lösung zu Aufgabe 79

(i) $D=\mathbb{R}^2$ (i.e. die gesamte x-y-Ebene), $W=\mathbb{R}$, die Höhenlinien sind Geraden $y-x=C$.

(ii) $D=\mathbb{R}^2$, $W=[0,\infty)$, für $z=0$ ist die Höhenlinie der Ursprung, für $z\geq 0$ sind die Höhenlinien Ellipsen mit Zentrum gleich dem Ursprung und den Hauptachsen entlang den Koordinatenachsen.

(iii) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<16\}$, $W=\left[\frac{1}{4},\infty\right)$, die Höhenlinien sind Kreise mit dem Ursprung als Zentrum und Radius $r<4$.

(iv) $D=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $W=\mathbb{R}$, Höhenlinien sind Kreise mit dem Ursprung als Zentrum und Radius $r>0$.

(v) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq y-x\leq 1\}$, $W=[-\pi/2,\pi/2]$, Höhenlinien sind Geraden $y-x=C$ mit $-1\leq C\leq 1$.

(vi) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$, $W=\mathbb{R}$, Höhenlinien sind Kreise mit dem Ursprung als Zentrum und Radius $r>1$.

Lösung zu Aufgabe 80

(i) Kugeloberflächen von Kugeln mit Zentrum am Ursprung.

(ii) Kugeloberflächen von Kugeln mit Zentrum am Ursprung.

(iii) Ebenen mit Normalenvektor $(1,0,1)$.

(iv) Ebenen mit Normalenvektor $(0,0,1)$.

(v) Zylinder mit Achse gleich der z-Achse.
(vi) Zylinder mit Achse gleich der x-Achse.
(vii) Rotationsparaboloide mit Achse gleich der z-Achse.

Lösung zu Aufgabe 81

(i) $\frac{\partial f}{\partial x} = -12x^2y^2 + 3y^4 - 3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -8x^3y + 12xy^3 + 2$
(ii) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 + e^x\cos(y) + 10$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^3 - e^x\sin(y) - 4y$
(iii) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2(\sin(x) + \sin(y)) + xy^2\cos(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy(\sin(x) + \sin(y)) + xy^2\cos(y)$
(iv) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2}$
(v) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xze^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2xye^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
(vi) $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x-y)\cos(z+2y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x-y)\cos(z+2y)-2\sin(x-y)\sin(z+2y)$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(x-y)\sin(z+2y)$
(vii) $\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}$, $\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V}$

Lösung zu Aufgabe 82

(i) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y\sin(x)}{(y+\cos(x))^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\cos(x)}{(y+\cos(x))^2}$
(ii) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{\sqrt{y}}$
(iii) $\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy + 43$, $\frac{\partial w}{\partial y} = x^2 - 20yz^3 - \frac{28}{\cos^2(4y)}$, $\frac{\partial w}{\partial z} = -30y^2z^2$
(iv) $\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{2t^7}{s} - \frac{4}{7}s^{-3/7}$, $\frac{\partial h}{\partial t} = 7t^6\log(s^2) - 27t^{-4}$
(v) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4}{x^2}\sin(4/x)e^{x^2y-5y^3}+2xy\cos(4/x)e^{x^2y-5y^3}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2-15y^2)\cos(4/x)e^{x^2y-5y^3}$
(vi) $\frac{\partial f}{\partial x} = -6\cos(3x-y^2)\sin(3x-y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y\cos(3x-y^2)\sin(3x-y^2)$
(vii) $\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$

Lösung zu Aufgabe 83

(i) 3, (ii) 2.

Lösung zu Aufgabe 84

(i) 3, (ii) -2.

Lösung zu Aufgabe 85

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + e^y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + xe^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 6x + e^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^y$.

Lösung zu Aufgabe 86

Das Symbol $\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}$ bedeutet dass zuerst nach y und dann nach x abgeleitet werden soll. Jedoch können wir die Reihenfolge der Ableitungen vertauschen, was die Berechnung stark vereinfacht:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x} = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 87

Beide Seiten abgeleitet nach x ergibt

$$\frac{\partial(yz)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\log(z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x},$$

i.e.

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0,$$

i.e.

$$\left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1,$$

i.e.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz - 1}.$$

Bemerkung: Zur besseren Übersicht kann man an Stelle von z den Ausdruck $z(x, y)$ in die ursprüngliche Gleichung einsetzen, da diese Gleichung z als Funktion von x und y definiert.

Lösung zu Aufgabe 88

Ableiten von beiden Seiten nach R_2 liefert

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2.$$

Mit $R_1 = 30$, $R_2 = 45$ und $R_3 = 90$ folgt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{3+2+1}{90} = \frac{1}{15}.$$

Somit folgt $R = 15$ und

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Lösung zu Aufgabe 89

(i) x zuerst, (ii) y zuerst, (iii) x zuerst, (iv) x zuerst, (v) y zuerst, (vi) y zuerst.

Lösung zu Aufgabe 90

(i) y zuerst, (ii) y zuerst, (iii) y zuerst, (iv) x zuerst.

Lösung zu Aufgabe 91

Durch die Kettenregel erhält man bei zweimaligem Ableiten nach x jeweils, bis auf einen Faktor c^2, den selben Ausdruck wie bei zweimaligem Ableiten nach t.

Lösung zu Aufgabe 92

Wir haben $z_0 = f(x_0, y_0) = -5$. Somit gilt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -5)$. Weiter haben wir $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x$. Somit haben wir $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = -4$ und $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = -3$. Die Gleichung der Tangentialebene ist somit $z = -4x - 3y + 5$.

Lösung zu Aufgabe 93

$z = 3x + 2y - 6.$

Lösung zu Aufgabe 94

Der Normalenvektor zur Fläche ist $\overrightarrow{n}_1 = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, -1\right)$. Der Normalenvektor der gegebenen Ebene ist $\overrightarrow{n}_2 = (2, 2, 2)$. Diese beiden Normalenvektoren müssen parallel sein, i.e. es muss gelten $k\overrightarrow{n}_1 = \overrightarrow{n}_2$ für eine Konstante $k \in \mathbb{R}$. Dies ist ein System von drei Gleichungen in drei Unbekannten. Die Lösung lautet $k = -2$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = -1$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = -1$. Mit $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 4x_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 2y_0$ folgt $x_0 = -1/4$, $y_0 = -1/2$. Zusammen mit $z_0 = f(x_0, y_0) = 3/8$ ist der gesuchte Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (-1/4, -1/2, 3/8)$.

Lösung zu Aufgabe 95

$(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 5).$

Lösung zu Aufgabe 96

$(4/9, -1/9, 2/27).$

Lösung zu Aufgabe 97

Die Linearisierung lautet $f(x, y) \approx 2x + y$.

Lösung zu Aufgabe 98

Der Gesamtwiderstand ist gegeben durch $R = R_1R_2/(R_1 + R_2)$. Die lineare Approximation lautet allgemein:

$$\Delta R \approx \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)_0 \Delta R_1 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right)_0 \Delta R_2,$$

wobei $(\ldots)_0$ die Auswertung der betreffenden Grösse bei $(R_1, R_2) = (10, 20)$ bezeichnet. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}, \qquad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Somit haben wir

$$\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)_0 = \frac{4}{9}, \qquad \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right)_0 = \frac{1}{9}.$$

Mit $\Delta R_1 = 1$, $\Delta R_2 = -2$ finden wir $\Delta R = \frac{4}{9} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot (-2) = \frac{2}{9}$, i.e. der Gesamtwiderstand R ändert sich approximativ um $\Delta R = \frac{2}{9}$.

Lösung zu Aufgabe 99

$F(t) = f(t, 1 - t) = t^2 + (1 - t)^2 = 2t^2 - 2t + 1.$

Lösung zu Aufgabe 100

(i) $F(t) = x(t)^2 + y(t)^2 = t^2 + (1 - t)^2 = 2t^2 - 2t + 1$. Daraus folgt $\frac{dF}{dt}(t) = 4t - 2$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = -1$. Daraus folgt $\frac{dF}{dt}(t) = 2x(t) \cdot 1 + 2y(t) \cdot (-1) = 2t + 2(1 - t)(-1) = 4t - 2$.

Lösung zu Aufgabe 101

(i) $\frac{dF}{dt}(t) = 0,$

(ii) $\frac{dF}{dt}(t) = 4(\cos(t) - \sin(t)),$

(iii) $\frac{dF}{dt}(t) = \frac{2}{t}\Big(2\log(t^2)\sin^3(4t) - \sin(4t)\sin(\log(t^2))\Big)$
$+ 4\cos(4t)\Big(3(\log(t^2))^2\sin^2(4t) + \cos(\log(t^2))\Big).$

Lösung zu Aufgabe 102

Die Temperatur $T(t)$ und die Temeraturänderung $\frac{dT}{dt}(t)$ sind gegeben durch:
$T(t) = e^{-16\sqrt{t}}\Big(17 + 2\cos(t) - \sin(\sin(t))\Big),$
$\frac{dT}{dt}(t) = e^{-16\sqrt{t}}\left(-2\sin(t) - \cos(t)\cos(\sin(t)) - \frac{8}{\sqrt{t}}\Big(17 + 2\cos(t) - \sin(\sin(t))\Big)\right).$

Lösung zu Aufgabe 103

$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x\sin(5y) \\ 5x^2\cos(5y) \end{pmatrix}$. Somit haben wir $\overrightarrow{\nabla} f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 104

$\overrightarrow{e} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix}$. Somit folgt $\overrightarrow{\nabla} f(2,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ und wir haben $D_{\overrightarrow{e}} f(2,1) = \overrightarrow{\nabla} f(2,1) \cdot \overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{28}{\sqrt{5}}.$

Lösung zu Aufgabe 105

x-Achse: $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit folgt $D_{\overrightarrow{e}} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}.$

y-Achse: $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Somit folgt $D_{\overrightarrow{e}} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial y}.$

Lösung zu Aufgabe 106

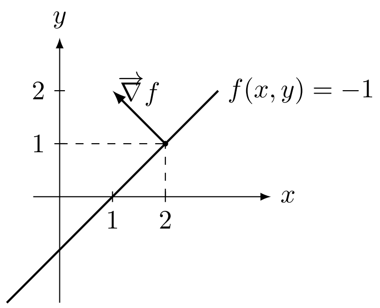
(i) $\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix},$

(ii) $\overrightarrow{\nabla} f = \frac{4}{x^2+1}\begin{pmatrix} -\frac{2xy}{x^2+1} \\ 1 \end{pmatrix},$

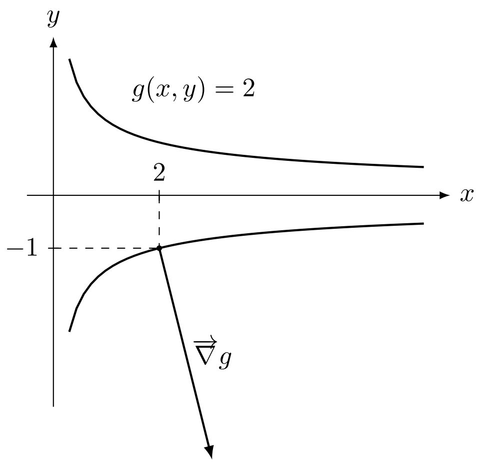
(iii) $\overrightarrow{\nabla} f = e^y\begin{pmatrix} \cos(x)\log(z) \\ \sin(x)\log(z) \\ \sin(x)/z \end{pmatrix}.$

Lösung zu Aufgabe 107

(i) $\overrightarrow{\nabla} f(2,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die Höhenlinie ist $f(x,y) = 1 - 2 = -1$.



(ii) $\overrightarrow{\nabla} g(2,-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, die Höhenlinie ist $g(x,y) = 2$.



Lösung zu Aufgabe 108

Wir haben

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $\overrightarrow{\nabla} f(-1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Richtung ist gegeben durch $\overrightarrow{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$D_{\overrightarrow{e}} f(-1,1) = \overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{\nabla} f(-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}$.

Lösung zu Aufgabe 109

(i) $\overrightarrow{\nabla} f = \frac{2}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(ii) $\overrightarrow{\nabla} g = \frac{1}{2\sqrt{2x+3y}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(iii) $\overrightarrow{\nabla} h = \begin{pmatrix} 2x + \frac{z}{x} \\ 2y \\ -4z + \log(x) \end{pmatrix}$

(iv) $\overrightarrow{\nabla} k = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{1}{x} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{1}{y} \\ -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 110

(i) $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D_{\overrightarrow{e}} f(1,0) = 2$.

(ii) $\overrightarrow{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D_{\overrightarrow{e}} g(1,0) = 2\sqrt{3}$.

Lösung zu Aufgabe 111

(i) $\overrightarrow{e} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$,

(ii) $\overrightarrow{e} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$,

(iii) $\overrightarrow{e} = \pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$,

(iv) $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}24\\-7\end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 112

Wir schreiben den unbekannten Gradienten im gegebenen Punkt als $\overrightarrow{\nabla} f(5,-9) = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$. Die beiden gegebenen Werte und Richtungen der Ableitung geben die Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = 2\sqrt{2},$$
$$\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = -3.$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist $u = 1$, $v = 3$. Somit gilt $\overrightarrow{\nabla} f(5,-9) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und die gesuchte Ableitung ist

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{\nabla} f(5,-9) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = -\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Lösung zu Aufgabe 113

Wir fassen die Ellipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ als Höhenlinie der Funktion $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ zum Funktionswert $f(x,y) = 2$ auf. Die Tangente an die Ellipse=Höhenlinie verläuft senkrecht zum Gradienten von $f(x,y)$, welcher am betrachteten Punkt durch $\overrightarrow{\nabla} f(-2,1) = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ gegeben ist. Die gesuchte Geradengleichung ist gegeben durch $\overrightarrow{n}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix} = 0$, wobei wir $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\nabla} f(-2,1)$ und $(x_0,y_0) = (-2,1)$ setzen. Wir erhalten $x - 2y = -4$.

Lösung zu Aufgabe 114

$x + y + z = 3$.

Lösung zu Aufgabe 115

Wir definieren $f(x,y,z) = x^2y - 4ze^{x+y}$. Dann ist die Fläche gegeben durch $f(x,y,z) = -35$. Wir haben

$$\overrightarrow{\nabla} f = \begin{pmatrix}2xy - 4ze^{x+y}\\x^2 - 4ze^{x+y}\\-4e^{x+y}\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\nabla} f(3,-3,2) = \begin{pmatrix}-26\\1\\-4\end{pmatrix}$$

Eine Gleichung der Tangentialebene ist

$$-26x + y - 4z = -89.$$

Lösung zu Aufgabe 116

(i) Für die Höhenlinien setzen wir $f(x,y) = C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Wir erhalten $y = \frac{C}{x}$. Für $C > 0$ sind dies Kurven im ersten und dritten Quadranten, für $C < 0$ sind dies Kurven im zweiten und vierten Quadranten. Für $C = 0$ ergibt sich $xy = 0$. Diese Gleichung hat Lösungen $x = 0$, dies entspricht der y-Achse, und

$y = 0$, dies entspricht der x-Achse. Somit sind die beiden Koordinatenachsen Höhenlinien zum Funktionswert $f(x,y) = 0$.

(ii) Wir haben $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ und somit:

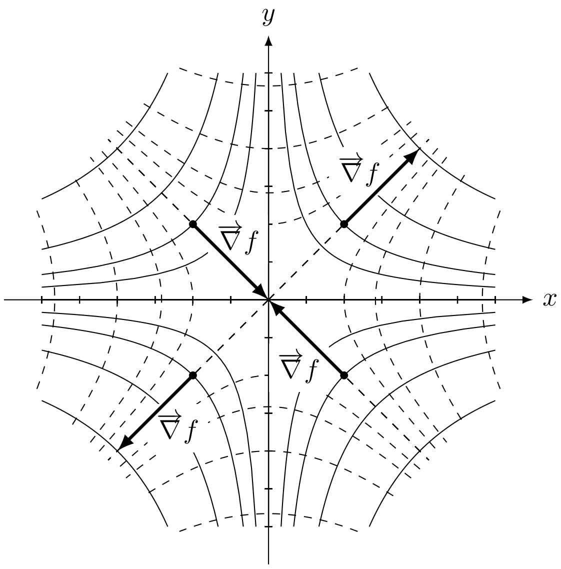
$$\vec{\nabla} f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\nabla} f(1,-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\vec{\nabla} f(-1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

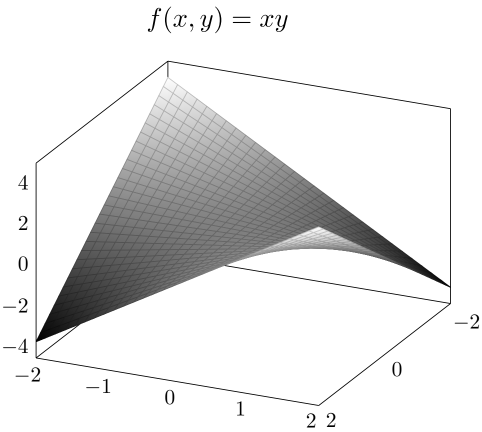
(iii) Die kritischen Punkte von $f(x,y)$ ergeben sich aus $\vec{\nabla} f = 0$. Daraus folgt dass der einzige kritische Punkt am Ursprung, i.e. bei $(0,0)$ liegt. Wir haben

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben $\operatorname{spec}(f''(0,0)) = \{-1, 1\}$ und somit liegt bei $(0,0)$ ein Sattelpunkt vor.

In der folgenden Grafik ist auf der linken Seite die x-y-Ebene mit den Höhenlinien (ausgezogen), den Gradienten in den betrachteten Punkten (Vektorpfeile) und Linien die senkrecht zu den Höhenlinien verlaufen (gestrichelt) gezeichnet. Auf der rechten Seite ist der Graph $z = f(x,y)$ für den Bereich $-2 \leq x \leq 2$ und $-2 \leq y \leq 2$ eingezeichnet. Auf der Graphenfläche sind schwach $x =$ konst. und $y =$ konst. Linien eingezeichnet.





Lösung zu Aufgabe 117

Bei $(-2,-2)$ ist ein relatives Maximum.

Lösung zu Aufgabe 118

Bei $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt, bei $(2,2)$ ist ein relatives Maximum.

Lösung zu Aufgabe 119

Bei $(2,0)$ ist ein relatives Minimum.

Lösung zu Aufgabe 120

Das absolute Maximum ist $f(0,0) = 1$ und das absolute Minimum ist $f(1,2) = -5$.

Lösung zu Aufgabe 121

Die absoluten Maxima sind $f(1,-1) = f(-1,-1) = 11$, das absolute Minimum ist $f(0,0) = 4$.

Lösung zu Aufgabe 122

Maximum: $f(2,1) = 2$, $f(-2,-1) = 2$. Minimum: $f(2,-1) = -2$, $f(-2,1) = -2$.

Lösung zu Aufgabe 123

$(2/5, 19/5)$.

Lösung zu Aufgabe 124

Maximum: $f(1,-2,5) = 30$. Minimum: $f(-1,2,-5) = -30$.

Lösung zu Aufgabe 125

Kürzester Abstand ist 1 bei den Punkten $(\pm 1, 0, 0)$ auf der Fläche.

Lösung zu Aufgabe 126

Grösste Temperatur: $T(\pm 2\sqrt{5}, \mp\sqrt{5}) = 125$. Kleinste Temperatur: $T(\pm\sqrt{5}, \pm 2\sqrt{5}) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 127

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dA &= \int_0^2 \int_{-1}^1 (100 - 6x^2y)dydx \\ &= \int_0^2 (100y - 3x^2y^2)\Big|_{-1}^1 dx = \int_0^2 200dx = 400.\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 128

$1/4$.

Lösung zu Aufgabe 129

(i) 84
(ii) -756
(iii) $\frac{7}{9} + \frac{2}{\pi}$
(iv) $\frac{1}{6}\log\left(\frac{5}{4}\right)$
(v) $e^2 - e^{-1} - 3$

Lösung zu Aufgabe 130

Integrationsreihenfolge $\iint \ldots dydx$:

$$\begin{aligned}-\iint_\Omega xydA &= -\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} xydydx \\ &= -\int_0^1 \frac{xy^2}{2}\Big|_x^{\sqrt{x}} dx = -\int_0^1 \left(\frac{x^2}{x} - \frac{x^3}{2}\right) dx\end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{24}.$$

Integrationsreihenfolge $\iint \ldots dxdy$:

$$-\iint_\Omega xydA = -\int_0^1 \int_{y^2}^{y} xydxdy$$
$$= -\int_0^1 \frac{x^2y}{2}\Big|_{y^2}^{y} dy = -\int_0^1 \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2}\right) dy$$
$$= -\left(\frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{12}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{24}.$$

Lösung zu Aufgabe 131

Wir bezeichnen mit Ω die Teilmenge der x-y-Ebene, welche der Grundfläche des Prismas entspricht. Integrationsreihenfolge $\iint \ldots dydx$:

$$V = \iint_\Omega (3 - x - y)dA = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)dydx = 1.$$

Integrationsreihenfolge $\iint \ldots dxdy$:

$$V = \iint_\Omega (3 - x - y)dA = \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)dxdy = 1.$$

Lösung zu Aufgabe 132

(i) $\frac{1}{2}e^4 - 2e$.
(ii) $\frac{55}{156}$

Lösung zu Aufgabe 133

(i)

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x^3 e^{y^3} dydx = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 e^{y^3} dxdy = \ldots = \frac{1}{12}(e^{729} - 1),$$

(ii)

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4 + 1}dxdy = \int_0^2 \int_0^{x^3} \sqrt{x^4 + 1}dydx = \ldots = \frac{1}{6}(17^{3/2} - 1).$$

Lösung zu Aufgabe 134

$V = \int_0^1 \int_{2x}^2 (6 - 5x^2)dydx = \ldots = \frac{31}{6}$.

Lösung zu Aufgabe 135

$V = \iint (10 - 4x - 2y)dA = \int_0^1 \int_{3x}^{-2x+5} (10 - 4x - 2y)dydx = \ldots = \frac{25}{3}$, wobei die obere Integrationsgrenze für y in der x-y-Ebene gegeben ist durch die Schnittlinie der Ebene $4x + 2y + z = 10$ und der x-y-Ebene, i.e. durch $z = 0$-setzen in dieser Ebenengleichung: $4x + 2y = 10$ woraus folgt $y = -2x + 5$.

Lösung zu Aufgabe 136

Aus Symmetriegründen genügt es das Volumen oberhalb der x-y-Ebene zu berechnen. Dies entspricht dann der Hälfte des Volumens. Die Deckfläche ist gegeben durch $z = \sqrt{4-x^2}$. In der x-y-Ebene ist das Integrationsgebiet ein Kreis mit Radius 2. Wir integrieren in der Reihenfolge $\iint \dots dydx$. Die Grenzen für x sind $-2 \leq x \leq 2$ und die Grenzen für y sind $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$. Somit ist das Volumen

$$V = 2\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-x^2}dydx = \ldots = \frac{128}{3}.$$

Lösung zu Aufgabe 137

Es handelt sich um einen Rotationsparaboloid mit Deckfläche bei $z = 16$. Das Volumen kann durch die Differenz aus einem Zylindervolumen oberhalb des Kreises mit Radius 4 und des Volumens zwischen dem Rotationsparaboloid und dem Zylinder (auch dieses Volumen hat als Bodenfläche den Kreis mit Radius 4) berechnet werden (Wir verwenden $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$):

$$\begin{aligned} V &= \iint_\Omega 16dA - \iint_\Omega (x^2+y^2)dA \\ &= \iint_\Omega (16 - (x^2+y^2))dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^4 (16-r^2)rdrd\varphi = \ldots = 128\pi. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 138

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\cos(r^2)drd\varphi = \ldots = \frac{\pi}{4}\sin(1).$$

Lösung zu Aufgabe 139

$|\Omega| = \iint_\Omega dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\varphi} rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} 2\varphi^2 d\varphi = \frac{16\pi^3}{3}.$

Lösung zu Aufgabe 140

$\iint_\Omega e^{x^2+y^2}dxdy = \int_0^\pi\int_0^1 e^{r^2}rdrd\varphi = \int_0^\pi \frac{1}{2}(e-1)d\varphi = \frac{\pi}{2}(e-1).$

Lösung zu Aufgabe 141

(i) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xydydx$, oder $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xydxdy$.

(ii) $\int_0^2\int_0^x y^2(x^2+y^2)dydx$, oder $\int_0^2\int_y^2 y^2(x^2+y^2)dxdy$.

(iii) $\int_0^3\int_0^4 (x^2+y^2)^3dydx$, oder $\int_0^4\int_0^3 (x^2+y^2)^3dxdy$.

Lösung zu Aufgabe 142

Wir verwenden die Koordinaten des Hinweises. Die Bodenfläche ist jeweils gegeben durch $z = 0$ und somit kann das Volumen direkt durch das Volumen unterhalb des Graphen der jeweiligen Funktion berechnet werden.

(i) Die Funktion welche die Flüssigkeitsoberfläche beschreibt ist $f(x,y) = H$. In Polarkoordinaten: $f(r,\varphi) = H$. Das Volumen ist somit

$$V_{(\mathrm{i})} = \int_0^{2\pi}\int_0^{d/2} Hrdrd\varphi = H\int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{d/2} d\varphi = H\int_0^{2\pi}\frac{d^2}{8}d\varphi = \frac{d^2\pi}{4}H,$$

was mit der Formel für das Zylindervolumen übereinstimmt.

(ii) Die Funktion welche die Flüssigkeitsoberfläche beschreibt ist $f(x,y) = \frac{H}{d}y + \frac{H}{2}$ (die Funktion verschwindet für $y = -d/2$, ist gleich H für $y = d/2$ und dazwischen linear in y). In Polarkoordinaten: $f(r,\varphi) = \frac{H}{d}r\sin(\varphi) + \frac{H}{2}$. Das Volumen ist somit

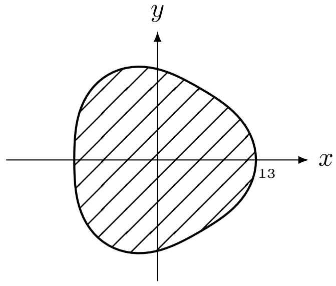
$$\begin{aligned} V_{(\mathrm{ii})} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{d/2}\left(\frac{H}{d}r\sin(\varphi) + \frac{H}{2}\right) rdrd\varphi \\ &= \frac{H}{d}\int_0^{2\pi}\int_0^{d/2} r^2\sin(\varphi)drd\varphi + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{d/2} Hrdrd\varphi}_{=V_{(\mathrm{i})}} \\ &= \frac{H}{d}\frac{r^3}{3}\Big|_0^{d/2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(\varphi)d\varphi}_{=0} + \frac{d^2\pi}{8}H = \frac{d^2\pi}{8}H \end{aligned}$$

(iii) Die Funktion welche die Flüssigkeitsoberfläche beschreibt ist $f(x,y) = \frac{2H}{d}y$ (die Funktion verschwindet für $y = 0$, ist gleich H für $y = d/2$ und dazwischen linear). In Polarkoordinaten $f(r,\varphi) = \frac{2H}{d}r\sin(\varphi)$ mit $\varphi \in [0,\pi]$. Das Volumen ist

$$\begin{aligned} V_{(\mathrm{iii})} = \int_0^{\pi}\int_0^{d/2}\frac{2H}{d}r\sin(\varphi)rdrd\varphi &= \frac{2H}{d}\int_0^{\pi}\frac{r^3}{3}\Big|_0^{d/2}\sin(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{2H}{3d}\frac{d^3}{8}\int_0^{\pi}\sin(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{d^2H}{12}(-\cos(\varphi))\Big|_0^{\pi} = \frac{d^2H}{6}. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 143

(i) Skizze besitzt drei Maxima und drei Minima am Umfang:



(ii) $r_{\min} = 12 - 1 = 11$, $r_{\max} = 12 + 1 = 13$.

(iii) Wir haben

$$|\Omega| = \int_0^{2\pi}\int_0^{12+\cos(3\varphi)} rdrd\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(144 + 24\cos(3\varphi) + \cos^2(3\varphi))d\varphi.$$

Wir berechnen die auftretenden Integrale einzeln (für das dritte Integal benutzen wir den Hinweis):

$$\int_0^{2\pi} 144 d\varphi = 288\pi, \qquad \int_0^{2\pi} 24\cos(3\varphi)d\varphi = \frac{24}{3}\sin(3\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(3\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(6\varphi))d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)d\varphi = \pi + \frac{1}{12}\sin(6\varphi)\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Somit gilt

$$|\Omega| = \frac{1}{2}(288\pi + \pi) = \frac{289\pi}{2}.$$

Lösung zu Aufgabe 144

(i) Wir haben

$$\phi = U\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos(\varphi) = Ur\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\cos(\varphi) = U\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right)x.$$

(ii) Wir haben

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} U\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) - \frac{UR^2 2x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{UR^2 2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

(iii) Bei $x^2 + y^2 = R^2$ vereinfacht sich der Ausdruck für $\overrightarrow{v}$ zu

$$\overrightarrow{v} = 2U\begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2}{R^2} \\ -\frac{xy}{R^2} \end{pmatrix}.$$

Der Betrag der Geschwindigkeit zum Quadrat ist

$$|\overrightarrow{v}|^2 = 4U^2\left(\left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^2 + \left(\frac{xy}{R^2}\right)^2\right).$$

Nun ist

$$1 - \frac{x^2}{R^2} = \frac{R^2 - x^2}{R^2} = \frac{y^2}{R^2},$$

wobei wir wieder $x^2 + y^2 = R^2$ benutzt haben. Der Betrag der Geschwindigkeit zum Quadrat vereinfacht sich zu

$$|\overrightarrow{v}| = \frac{4U^2}{R^4}(y^4 + x^2y^2) = \frac{4U^2y^2}{R^4}(y^2 + x^2) = \frac{4U^2y^2}{R^2}.$$

Da wir diese Grösse für $x^2+y^2 = R^2$ untersuchen, gilt $y \in [-R, R]$. Die Minima liegen somit bei $y = 0$ (daraus folgt $x = \pm R$) und die Maxima liegen bei $y = \pm R$ (daraus folgt $x = 0$). Wir haben also

Minimum bei $(R, 0)$ und $(-R, 0)$ $\quad\rightarrow\quad$ $|\overrightarrow{v}| = 0,$

Maximum bei $(0, R)$ und $(0, -R)$ $\quad\rightarrow\quad$ $|\overrightarrow{v}| = 2U.$

Lösung zu Aufgabe 145

$$I_p = \iint_\Omega (x^2 + y^2)dA = \int_0^\pi \int_0^R r^2 r dr d\varphi = \int_0^\pi \frac{r^4}{4}\Big|_0^R d\varphi = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Lösung zu Aufgabe 146

Das Verhältnis zwischen linkem und rechtem polarem Flächenmoment beträgt 7/25.

Lösung zu Aufgabe 147

(i) $I_x = I_y = 1/12$. $I_{xy} = -1/24$.
(ii) $|\Omega| = 1/2$, $(x_s, y_s) = (1/3, 1/3)$.
(iii) $I_{xs} = I_{ys} = 1/36$, $I_{xys} = 1/72$.

Lösung zu Aufgabe 148

Wir bilden I_x als Differenz von Flächenmomenten von Rechtecken: Grosses Rechteck mit Breite B und Höhe H, zwei kleine Rechtecke mit Breite $\frac{B-d}{2}$ und Höhe $H-2a$. Wir verwenden die Formel für $I_x = bh^3/12$ für ein Rechteck mit Breite b und Höhe h. Es folgt

$$I_x = \frac{1}{12}\left(BH^3 - (B-d)(H-2a)^3\right).$$

Für I_y gehen wir analog vor. Es folgt

$$I_y = \frac{1}{12}\left(2aB^3 + (H-2a)d^3\right).$$

Bemerkung: Die x-y-Achsen gehen bereits durch den Schwerpunkt, i.e. es gilt $(x_s, y_s) = 0$ und $I_x = I_{xs}$, $I_y = I_{ys}$.

Lösung zu Aufgabe 149

Aus Symmetriegründen genügt es das Integral im ersten Quadranten zu berechnen:

$$\begin{aligned}\iint_\Omega y^2 dA = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}-x} y^2 dy dx &= \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{2}} y^3\Big|_0^{\sqrt{2}-x} dx \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{2}-x)^3 dx = -\frac{4}{12}(\sqrt{2}-x)^4\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{16}{12}.\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 150

Wir berechne das I_{xs} von einem Rechteck der Breite 5 und Höhe 2, korrigieren diesen Wert mit dem Satz von Steiner und multiplizieren mit 2 da der Querschnitt 2 solche Rechtecke beinhaltet (oben links und unten rechts). Der erhaltene Ausdruck (ohne den Faktor 2) steht in der untenstehenden Gleichung in der Klammer (davor der erwähnte Faktor 2). Was dann noch fehlt ist das Quadrat in der Mitte. Bei diesem Quadrat gilt $I_x = I_{xs} = 2 \cdot 2^3/12$. Dieser Term steht nach der Klammer in der untenstehenden Gleichung. Zusammen haben wir

$$I_x = \iint_\Omega y^2 dA = 2\left(\frac{5\cdot 2^3}{12} + 2\cdot 5\cdot 2^2\right) + \frac{2\cdot 2^3}{12} = 88.$$

Lösung zu Aufgabe 151

(i) $p_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$
(ii) $p_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$
(iii) $p_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
(iv) $p_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$
(v) $p_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}$
(vi) $p_3(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}$
(vii) $p_3(x) = 4 - 5x - 2x^3$
(viii) $p_3(x) = 46 - 61(x+2) + 36(x+2)^2 - 10(x+2)^3$
(ix) $p_3(x) = x^2 - x^3$
(x) $p_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}(x - \frac{\pi}{4})^3$

Lösung zu Aufgabe 152

(i) $p_6(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$,
(ii) $p_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$.

Lösung zu Aufgabe 153

(i) $p_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$, (ii) $p_4(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 + \frac{1}{32}(x-1)^4$.

Lösung zu Aufgabe 154

$p_3(x) = 8 + 3(x-3) + \frac{3}{16}(x-3)^2 - \frac{1}{128}(x-3)^3$.

Lösung zu Aufgabe 155

(i) $p_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$.
(ii) $R_2(x) = \frac{1}{3(1+\xi)^3}x^3$, mit $|\xi| < |x|$.
(iii) $x \leq 1/2$. Daraus folgt $R_2(x) \leq \frac{1}{3(1+\xi)^3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$. Mit $\xi < x \leq 0.5$ folgt $R_2(x) < \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24}$.

Lösung zu Aufgabe 156

Das Taylorpolynom lautet $p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$. Das Restglied ist $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4$. Wir haben $f^{(4)}(\xi) = \sin(\xi)$. Da $-1 \leq \sin(\xi) \leq 1$ für $\xi \in (-\pi/2, \pi/2)$, folgt $|f^{(4)}(\xi)| \leq 1$. Zusammen mit $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ folgt die obere Schranke für den Fehler: $|R_2(x)| \leq \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{16 \cdot 4!} = \frac{\pi^4}{384}$.

Lösung zu Aufgabe 157

Wir haben

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \\ &= x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \left(\frac{2}{5!} + \frac{1}{3!}\right)x^6 + \dots\end{aligned}$$

Analog findet man

$$\cos^2(x) = 1 - x^2 + \left(\frac{2}{4!} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots$$

Die Terme bis (und mit) zur vierten Ordnung heben sich auf (man kann zeigen dass sich die Terme beliebiger Ordnung aufheben. Dies ist nicht überraschend, da wir aus geometrischen Überlegungen wissen dass $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ exakt gilt).

Lösung zu Aufgabe 158

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= e^x.\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 159

(i) $Q(x) = -\frac{x^2}{2}$

(ii) $Q(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Lösung zu Aufgabe 160

Sei $f(x) = e^x$. Die Taylorreihe ist

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Mit $f^{(k)}(a) = e^a$ für alle k folgt das Resultat.

Lösung zu Aufgabe 161

Wir linearisieren am Punkt $(x_0, y_0) = (0, 25)$. Wir haben $f(x_0, y_0) = e^0\sqrt{25} = 5$. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x\sqrt{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{e^x}{2\sqrt{y}}.$$

Ausgewertet bei (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,25) = e^0\sqrt{25} = 5, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,25) = \frac{e^0}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}.$$

Die Linearisierung

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

mit den oben berechneten Grössen ist

$$f(0.01, 24.8) \approx 5 + 5(0.01 - 0) + \frac{1}{10}(24.8 - 25) = 5 + 0.05 - 0.02 = 5.03.$$

Lösung zu Aufgabe 162

Idee: Wir linearisieren die Funktion $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ und werten die gefundene Linearisierung an der Stelle $(x,y) = (0.01, 0.99\pi)$ aus. Die allgemeine Linearisierung für eine Funktion von zwei Variablen ist gegeben durch

$$f(x,y) \approx f(0,\pi) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Wir haben

$$f(0,\pi) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = -1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = 0.$$

Es folgt

$$\sin(0.01)\cos(0.99\pi) = f(0.01, 0.99\pi) \approx 0 - 1 \cdot 0.01 + 0 = -0.01.$$