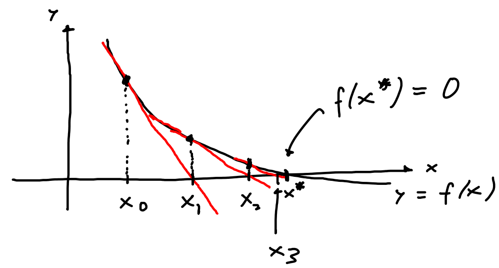
Newton Methode

Problem: Löse $f(x) = 0$ nach x auf, wobei analytische Lösg. nicht möglich (z.B. $e^{-x} = x$)

Idee: Folge von Näherungswerten, numerisch berechnet:

Vorgehen: Grafisch:



Suchen x^*, s.d. $f(x^*) = 0$

Idee:
Schnittpkte. der Tang. mit x-Achse liefern Approx. für x^*.

Mathematisch: (Aufgabe)

(i) Startwert: $\boxed{x_0}$

(ii) Gleichung Tang. an $y = f(x)$ bei $x = x_0$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

(iii) $x_1 = ?$: $y = 0 \longrightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$\left(\begin{array}{l} y = \underset{\underset{f'(x_0)}{\parallel}}{m}x + b \\ \text{Einsetzen von } (x_0, f(x_0)) \longrightarrow b \\ \text{oder: } \quad f'(x_0) = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \right)$$

(iv) Gl. Tang. an $y = f(x)$ bei $x = x_1$:
$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$

(v) $x_2 = ?$: $y = 0 \longrightarrow x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

(vi) Allg. Gl. für Iterationsvorschrift: $x_n \longmapsto x_{n+1}$: $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$

Bsp.: Approx. von $\sqrt{2}$ auf 10 Stellen nach dem Komma:

$f(x) = x^2 - 2$, suchen $x^* > 0$ s.d. $f(x^*) = 0$

$f'(x) = 2x$

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}$

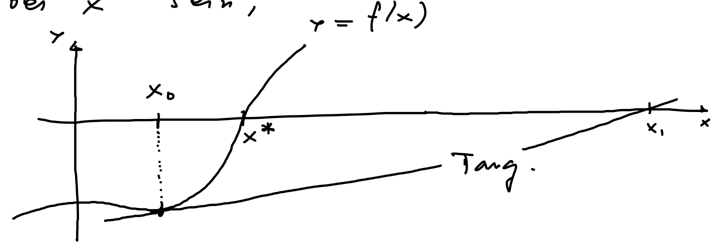
n	x_n	$\lvert x_n - \sqrt{2} \rvert$
0	2	0.586..
1	1.5	0.0858...
2	$1.41\overline{6}$	0.00245
3	1.414258627	$2.1 \cdot 10^{-6}$
4	1.41421356237	$1.6 \cdot 10^{-12}$
5	—— " ——	....

Bemerkungen:

(i) Problem muss in Form $f(x) = 0$ formuliert sein.

(ii) $f(x)$ muss diff'bar sein.

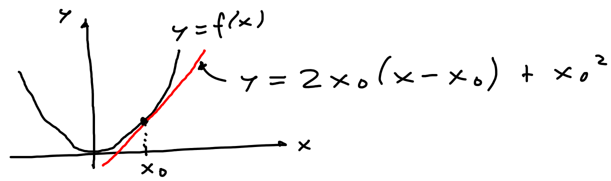
(iii) Startwert muss genügend nahe bei x^* sein, ansonsten keine Konvergenz. Bsp:



(iv) Für x_0 genügend nahe bei x^* haben wir quadratische Konvergenz: $|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2$

Aufgabe: Man finde Iterationsgl. $x_n \mapsto x_{n+1}$ für Approx. der Lösg. der Gl. $e^{-x} = x$.

Lineare Approx.



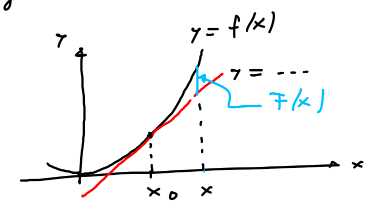
Bsp. $f(x) = x^2$

Suchen lin. Approx. von $f(x)$ bei $x = x_0$.

Diese ist gegeben durch Tang.: $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$

Sei $F(x)$ Unterschied zw. $f(x)$ und Tang. an $f(x)$.

Wir bestimmen $F(x)$:



$$\underbrace{f(x)}_{x^2} = \underbrace{2x_0(x - x_0) + x_0^2}_{\text{Tang.}} + F(x)$$

I.e. $$x^2 = 2x_0 x - x_0^2 + F(x)$$

$$\longrightarrow \underline{F(x)} = x^2 - 2x_0 x + x_0^2 = \underline{(x - x_0)^2}$$

|| Fehler $F(x)$ den begangen wird, wenn man die Tang. und nicht $f(x)$ verwendet ist quadratisch in $(x - x_0)$!

Wir schreiben nun: $$f(x) \approx 2x_0(x - x_0) + x_0^2 \qquad (*)$$

und meinen: $$f(x) = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 + F(x)$$

mit $F(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$, schneller als linear in $x - x_0 = \Delta x$

(Mathematisch exakt: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x)}{\Delta x} = 0$)

$(*)$ ist: $$f(x) \approx \underbrace{2x_0}_{=\frac{df}{dx}(x_0)}(x - x_0) + \underbrace{x_0^2}_{= f(x_0)}$$

I.e.: $$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0)}$$

Allg. Gl. für Lin. Approx. von $f(x)$ bei $x = x_0$ ||

Bsp: Lin. Approx. von $f(x) = \sin(x)$ bei:

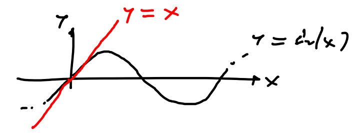
(i) $x_0 = \frac{\pi}{6}$

(ii) $x_0 = 0$

(i) $\underline{f(x)} \approx f(\frac{\pi}{6}) + \frac{df}{dx}(\frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{6})$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \underline{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$$

(ii) $\underline{f(x)} \approx f(0) + \frac{df}{dx}(0)(x - 0) = 0 + \underbrace{\cos(0)}_{=1} \cdot x = \underline{x}$



Anwendungsbeispiel: <u>Messung Kugel</u>: $r = (30 \pm \underset{\uparrow}{0.1})$ cm

Fehlergrenzen

Ges: relativer Fehler Volumens (approximativ)

$r_0 = 30$; $\Delta r = \pm 0.1$

$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ Ges: $\frac{\Delta V}{V}$

Wir haben: $V(r) \approx V(r_0) + \frac{dV}{dr}(r_0)\underbrace{(r - r_0)}_{\Delta r}$ (lin. Approx.)

$$\longrightarrow \Delta V \approx \underbrace{\frac{dV}{dr}(r_0)}_{= 4\pi r_0^2} \Delta r$$

$$\longrightarrow \underline{\frac{\Delta V}{V}} \approx \frac{4\pi r_0^2 \, \Delta r}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{3}{r_0}\Delta r = \frac{3}{30} \cdot (\pm 0.1) = \underline{\pm 0.01}$$