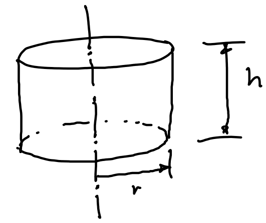
Aufgabe: Herstellung zylindrischen Büchse (mit Deckel), so dass Material min. ist.

Volumen $= 1\,dm^3$

Ges: Verhältnis Durchmesser zu Höhe.



Lösg.: Oberfläche: $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$: **Zielfunktion**

Nebenbedingung: $V = r^2\pi h = 1 \longrightarrow h = \frac{1}{r^2\pi}$ $(*)$

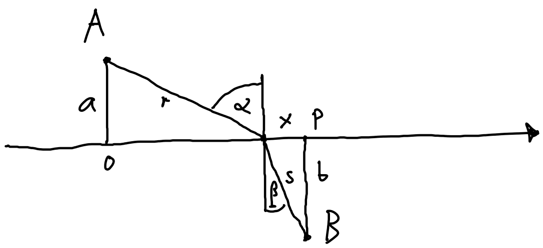
$(*)$ in Zielfkt.: $O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$

$$\frac{dO}{dr}(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} \overset{!}{=} 0 \longrightarrow 4\pi r = \frac{2}{r^2}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

$$\longrightarrow \frac{\text{Durchmesser}}{\text{Höhe}} = \frac{2r}{h} \overset{(*)}{=} \frac{2r\,r^2\pi}{1} = 2\pi r^3 = \underline{1}$$

Bsp: Lichtstrahl von A nach B:



Medium 1: c_1

Medium 2: c_2

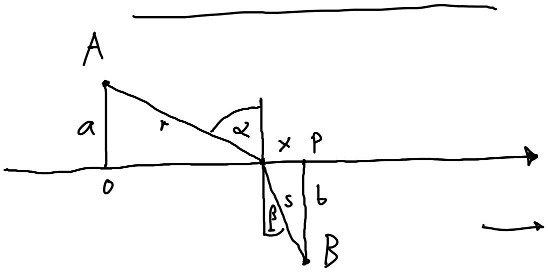
Lichtgeschw.

Prinzip von Fermat: Licht geht auf dem Weg, der am wenigsten Zeit erfordert

$\longrightarrow$ (i) Strahl auf Geraden in den Medien

(ii) Strahlen liegen in Ebene

Totale Zeitdauer: $T(x) = \frac{r}{c_1} + \frac{s}{c_2}$



$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(p-x)^2+b^2}}{c_2}$$

$$\longrightarrow \frac{dT}{dx}(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{p-x}{c_2\sqrt{(p-x)^2+b^2}}$$

$$= \frac{\sin(\alpha)}{c_1} - \frac{\sin(\beta)}{c_2} \overset{!}{=} 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2}}$$ Brechungsgesetz (Snellius)

Mit c: Lichtgeschw. im Vakuum

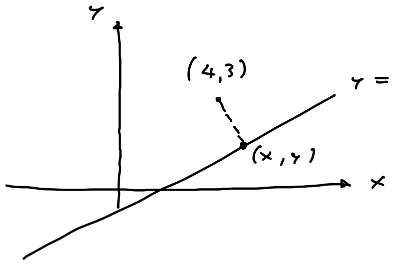
$\longrightarrow$ $n_1 = \frac{c}{c_1}$: Brechungsindex Medium 1

$n_2 = \dots$

$\longrightarrow$ Gesetz ist: $\boxed{n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)}$

Aufgabe: **Ges:** Pkt. auf Geraden $y = \frac{1}{2}x - 1$ mit minimalem Abstand zu Pkt. $(4,3)$.

Lösg.:



Abstand:

$D = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}$: Zielfkt.

$y = \frac{1}{2}x - 1$: Nebenbed.

$$\longrightarrow D(x) = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\tfrac{1}{2}x - 1 - 3\right)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\tfrac{1}{2}x - 4\right)^2}$$

$$\longrightarrow \frac{dD}{dx}(x) = \frac{2(x-4) + 2\left(\frac{1}{2}x - 4\right)\frac{1}{2}}{2\sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{1}{2}x - 4\right)^2}} = \frac{\frac{5}{4}x - 6}{\sqrt{\dots}} \overset{!}{=} 0 \longrightarrow \frac{5}{4}x - 6 = 0$$

$\longrightarrow x = \frac{24}{5}$

$\longrightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{7}{5}$

Bem.: Können auch Abstand^2 minimieren:

$$h = D^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + \left(\tfrac{1}{2}x - 4\right)^2$$

$$\longrightarrow \frac{dh}{dx} = 2(x-4) + 2\left(\tfrac{1}{2}x - 4\right)\tfrac{1}{2} = \frac{5}{2}x - 12 \overset{!}{=} 0$$

$\longrightarrow x = \frac{24}{5}$

$\longrightarrow y = \frac{7}{5}$

Bem.: Alternative Notationen für Ableitg.:

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \dot{f}(x) = \dots$$

Bsp: $(fg)' = f'g + fg'$