Ableitung der inversen Fkt.

$$1 = \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x))$$
$$= \frac{df}{dx}(f^{-1}(x)) \frac{df^{-1}}{dx}(x) \longrightarrow \boxed{\frac{df^{-1}}{dx}(x) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(x))}}$$

Bsp: $f(x) = e^x$

$f^{-1}(x) = \log(x) \longrightarrow \frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{e^{\log(x)}} = \frac{1}{x}$

Arcsin: $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$

Arccos(x): $\frac{d}{dx}\arccos(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Aufgabe: (i) $\frac{d}{dx}\tan(x) = ?$

(ii) $\frac{d}{dx}\arctan(x) = ?$

Lösg.: (i) $\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sin(x)(\cos(x))^{-1}\right)$

$$= \cos(x)(\cos(x))^{-1} - \sin(x)(\cos(x))^{-2}(-\sin(x))$$
$$= 1 + \tan^2(x)$$

(ii) $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$

Aufgabe: Man leite nach x ab:

(i) $f(x) = 4\arccos(2x) - 10\arctan(x)$

(ii) $f(x) = \sqrt{x}\arcsin(3x^2)$

Hinweis:

$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Lösg.:

(i) $\frac{df}{dx}(x) = -4\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2 - 10\frac{1}{1+x^2} = -\frac{8}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{10}{1+x^2}$

(ii) $\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\arcsin(3x^2) + \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{1-(3x^2)^2}}\cdot 6x = \frac{\arcsin(3x^2)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}\,6x}{\sqrt{1-9x^4}}$

Ableitungen höherer Ordnung

Erste Ableitung: $\frac{df}{dx}(x)$

2te Ableitung: $\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = \frac{d^2f}{dx^2}(x)$

$\vdots$

nte Ableitung: $\frac{d^nf}{dx^n}(x)$

Aufgabe: Ges: Die ersten 6 Ableitungen der Fkt.

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 11x + 5$$

Lösg.:

$$\frac{df}{dx}(x) = 4x^3 - 9x^2 + 14x - 11$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = 12x^2 - 18x + 14$$

$$\frac{d^3f}{dx^3}(x) = 24x - 18$$

$$\frac{d^4f}{dx^4}(x) = 24$$

$$\frac{d^5f}{dx^5}(x) = 0$$

$$\frac{d^6f}{dx^6}(x) = 0 .$$

Wenn Fkt. kein Polynom ist, sind alle Ableitungen ungleich Null.

Aufgabe: $f(x) = (3x+2)^{5/3}$; Ges: $\frac{d^3f}{dx^3}(2) = ?$

Lösg.:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{5}{3}(3x+2)^{2/3} \cdot 3 = 5(3x+2)^{2/3}$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x) = \frac{10}{3}(3x+2)^{-1/3} \cdot 3 = 10(3x+2)^{-1/3}$$

$$\frac{d^3f}{dx^3}(x) = -\frac{10}{3}(3x+2)^{-4/3} \cdot 3 = -10(3x+2)^{-4/3}$$

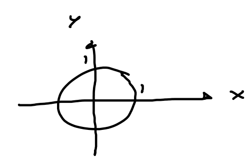
$$\longrightarrow \underline{\frac{d^3f}{dx^3}}(2) = \underline{-10 \cdot 8^{-4/3}} = -10 \cdot 2^{-4} = -\frac{10}{16} = \underline{-\frac{5}{8}}$$

Bem.: Wichtige Anwendungen:

- Geometrie: 2te Ableitung ist <u>Krümmung</u>
- Technik: 2te Ableitung der Pos. ist <u>Beschleunigung</u>

Implizite Ableitung

<u>Implizite Funktion:</u> $\underline{F(x,y) = 0}$

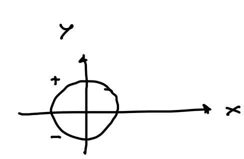


<u>Bsp:</u> $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$F(x,y) = 0$ ist: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

i.e. $x^2 + y^2 = 1$: ein <u>Kreis</u> mit Zentrum bei $(0,0)$ und Radius: $r = 1$.

<u>Wie findet man Tangente an Kreis?</u>



Zwei Ideen:

(a) Auflösen nach y: $x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx}(x) = \mp \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b) **Implizite Ableitung**

Vorgehen: (i) Betrachte y in $F(x,y)=0$ als Fkt. von x:

$$\underbrace{F(x,y(x))}_{\text{ist eine Fkt. von } x\,!} = 0$$

(ii) Leite nach x ab.

(iii) Löse nach $\frac{dy}{dx}$ auf.

Am Bsp. Kreis: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

(i) $\longrightarrow F(x,y(x)) = x^2 + (y(x))^2 - 1$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + (y(x))^2 - 1\right) = 2x + \frac{d}{dx}(y(x))^2 = 2x + \underbrace{\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right)}_{= 2y(x)\cdot\frac{dy}{dx}(x)}$$

$f(x) = x^2$

$g(x) = y(x)$

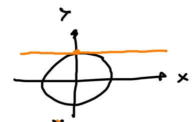
(ii) $\longrightarrow \frac{d}{dx} F(x,y(x)) = 2x + 2y(x)\frac{dy}{dx}(x) = 0$

da $F(x,y)=0$

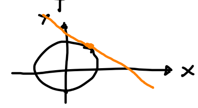
(iii) $\longrightarrow \underline{\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{x}{y(x)}}$ $\left(\text{I.e. } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\right)$

Bsp: Steigung Tang. im Pkt.

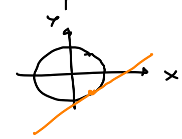
$(x,y) = (0,1)$ ist: $\frac{dy}{dx} = 0$



$(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ist: $\frac{dy}{dx} = -1$



$(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ist: $\frac{dy}{dx} = 1$



Aufgabe: $F(x,y) = 2y^3 + 6x^3 - 24x + 6y$

(i) Schnittpunkte von $F(x,y)=0$ mit x-Achse.

(ii) Steigung Tang. in diesen Punkten.

Lösg.: (i) x-Achse $\longrightarrow y=0$, i.e. löse $F(x,0)=0$:

$$6x^3 - 24x = 0$$
$$6x(x^2-4) = 0 \longrightarrow x=0,\ x=\pm 2$$
$$\longrightarrow \underline{S_1(0,0),\ S_2(2,0),\ S_3(-2,0)}$$

(ii)
$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{d}{dx}\left(2(y(x))^3 + 6x^3 - 24x + 6y(x)\right)$$
$$= 6(y(x))^2\frac{dy}{dx}(x) + 18x^2 - 24 + 6\frac{dy}{dx}(x) \overset{!}{=} 0$$

$\longrightarrow \underline{\frac{dy}{dx} = \frac{4-3x^2}{y^2+1}} \longrightarrow \underline{\frac{dy}{dx}(S_1) = 4}$

$\underline{\frac{dy}{dx}(S_2) = -8}$

$\underline{\frac{dy}{dx}(S_3) = -8}$