Differentialrechnung

Motivation: Physikalisch: Was ist Geschwindigkeit?

Bsp: Auto auf Strasse: t : Zeit

$y = f(t)$: Weg (Position)

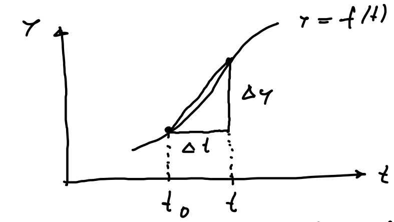
Suchen Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0.

Naive Formel: $\text{Geschwindigkeit} = \dfrac{\text{zurückgelegten Weg}}{\text{Zeitdifferenz}}$

Nur korrekt wenn sich Geschw. nicht ändert.

Wie berechnet man Momentangeschw.:

Betrachte Intervall: $[t_0, t]$



$\Delta y = f(t) - f(t_0)$

$\Delta t = t - t_0$

$$v_{t_0,t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

ist Durchschnittsgeschw. im Intervall $[t_0, t]$.

Idee: Für Momentangeschw. zur Zeit t_0 muss Länge des Intervalls kleiner gemacht werden:

$$v_{t_0} = \lim_{t \to t_0} v_{t_0,t} = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Bsp: Stein fällt in 10m tiefen Brunnen.
Ges: Geschw. beim Aufprall.

$\downarrow y$

Lös: Nehmen an: $y = f(t) = \frac{g}{2} t^2 \quad (g \doteq 10 \frac{m}{s^2})$

Auftreffzeit: bei $y = 10$: $10 = \frac{g}{2} t_0^2 \longrightarrow t_0 = \sqrt{\frac{20}{g}} = \sqrt{2}$

Durchschnittsgeschw. in $[t_0, t]$: $(t_0 < t)$

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\frac{g}{2} t^2 - \frac{g}{2} t_0^2}{t - t_0}$$

$$= \frac{g}{2} \cdot \frac{t^2 - t_0^2}{t - t_0} = \frac{g}{2} \frac{(t + t_0)(t - t_0)}{t - t_0} = \frac{g}{2}(t + t_0)$$

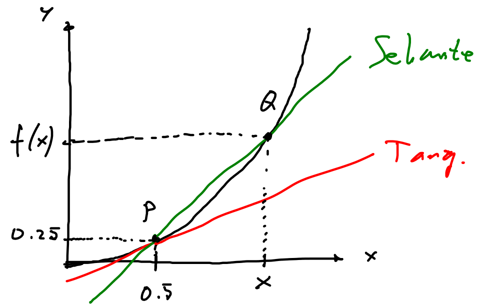
Momentangeschw. bei t_0:

$$\underline{v_{t_0}} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{g}{2}(\underset{t_0 = \sqrt{2}}{\underset{\uparrow}{t}} + \underset{\sqrt{2}}{\underset{\parallel}{t_0}}) = g t_0 = \underline{10\sqrt{2}}$$

$(v_{t_0} \doteq 14 \frac{m}{s})$.

Motivation: Geometrisch: Tangentensteigung

Bsp: $y = x^2$, gesucht: Steigung der Tang. an $y = x^2$ bei $x = 0.5$ (i.e. im Pkt. $(0.5, 0.25)$)



Steigung Sekante: Gegeben durch Differenzenquotient

$$m_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(0.5)}{x - 0.5} = \frac{x^2 - 0.5^2}{x - 0.5}$$

$$= \underline{x + 0.5}$$

Steigung Tang.: Idee: Bringen Q näher an P heran:

$\rightarrow$ Differentialquotient:

$$m_T = \lim_{x \to 0.5} \frac{f(x) - f(0.5)}{x - 0.5} = \lim_{x \to 0.5} (x + 0.5) = \underline{1}$$

Bem: Tang. liefert bestmögliche lin. Approx. der Kurve $y = f(x)$ für x-Werte nahe bei 0.5.

Def. der Ableitung:

> **Def:** Sei $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 (inklusive x_0) definiert. Die Ableitung von $f(x)$ im Pkt. x_0 ist:
>
> $$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$
>
> vorausgesetzt dass dieser Grenzwert existiert.

$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{df}{dx} \right)$

Bem.: (i) Falls $\frac{df}{dx}(x_0)$ ex., sagt man die Fkt. $f(x)$ sei bei x_0 ableitbar oder differenzierbar.

(ii) Falls Fkt. in jedem Pkt. ihres Def.-Bereichs diff.bar ist, heisst sie diff.-bare Fkt.

(iii) Physikalisch: Sei t: Zeit

$y = f(t)$: Position

$\rightarrow v_{t_0} = \frac{df}{dt}(t_0)$: Geschw. bei t_0.

(iv) Geometrisch: $y = f(x)$: Graph

$\frac{df}{dx}(x_0)$: Steigung der Tang. an $y = f(x)$ im Pkt. $(x_0, f(x_0))$.

Bsp: (i) Ableitung von $g(x) = x^2$ bei $x = 3$

$$\underline{\frac{dg}{dx}(3)} = \lim_{h\to 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3^2 + 6h + h^2 - 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6+h}{1} = \underline{6}$$

I.e. Tang. an $y = x^2$ bei $x = 3$ hat Steigung 6.

(ii) [Aufgabe] Ableitung von $g(x) = x^2$ bei x.

[Lsg.]

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^2} = \frac{dg}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

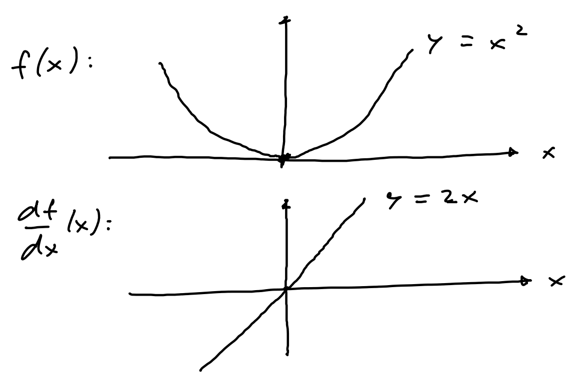
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) = \boxed{2x}$$

Wir sehen:

Ableitung $\frac{df}{dx}(x)$ einer Fkt. $f(x)$ kann wieder als Fkt. aufgefasst werden

Anschauung:



Ableitung ist die Steigung!

Aufgabe: Man leite grafisch ab: